

1

【解答】

(1) ア 2 イ 6

(2) ウ 2 エ 1 オ 2 カ 6 キ 2 ク 3 ケ 4

(3) コ 7 サ 8 シ 1 ス 2 セ 8 ソ 5

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= 2\sqrt{3}\sin^2\frac{x}{2} - \sin x + a \\&= 2\sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{2} - \sin x + a \\&= \sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x - \sin x + a \\&= \sqrt{3} - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + a\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq \pi$ であるとき、 $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$ となるから

$$\begin{aligned}-\frac{\sqrt{3}}{2} &\leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 + a &\leq \sqrt{3} - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + a \leq \sqrt{3} + \sqrt{3} + a \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 + a &\leq \sqrt{3} - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + a \leq 2\sqrt{3} + a\end{aligned}$$

である。 $f(x)$ の最小値が $\sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{3} - 2 + a &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow a &= 2\end{aligned}$$

となり、このとき

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

である。

(2)

1以上 n 以下の自然数から相異なる2つを選ぶとき、その組合せの総数は

$${}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1) \text{通り}$$

ある。そのうち、互いに隣り合う2つの自然数の組は

$$(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$$

の $n-1$ 組含まれる。よって、1以上 n 以下の自然数から互いに隣り合わない2つを選ぶ組合せの総数は

$$\frac{1}{2}n(n-1) - (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{通り}$$

である。また、1以上 n 以下の自然数から相異なる3つの自然数を選ぶとき、その組合せの総数は

$${}_nC_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \text{通り}$$

ある。そのうち、互いに隣り合う3つの自然数の組は

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), \dots, (n-2, n-1, n)$$

の $n-2$ 組含まれる。また、互いに隣り合う2つの自然数の組は上記より $n-1$ 組存在し、さらに残りの自然数から1つ選んで3つの自然数の組を作る場合、その組は $(n-1)(n-2)$ 通り作ることができるが、そこには互いに隣り合う3つの自然数の組を2回ずつ重複して数えているため、互いに隣り合う自然数がちょうど2つであるような3つの自然数の選び方は

$$(n-1)(n-2) - 2(n-2) = (n-2)(n-3) \text{通り}$$

ある。以上より、どの2つも隣り合わない3つを選ぶ組合せの総数は

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - (n-2) - (n-2)(n-3) = \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4) \text{通り}$$

である。

(3)

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OB}$$

であるから、 $AP:PD = s:(1-s)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD} \\ &= (1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}s\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表され、また、 $BP:PC = t:(1-t)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{4}t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表される。 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は互いに一次独立なベクトルであるから

$$\begin{aligned}\begin{cases} 1-s = \frac{1}{4}t \\ \frac{4}{7}s = 1-t \end{cases} \\ \Leftrightarrow (s, t) = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

である。点Qは直線OP上の点であるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= k\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1}{8}k\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表され、さらに点Qは辺AB上の点であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}k + \frac{1}{2}k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

となる。以上より

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OP}$$

である。

【解答】

- (1) タ 1 チ 9
 (2) ツ -1 テ 4 ト 0
 (3) あ f ナ 2 い b う e ニ 4
 (4) え b ヌ 5

【解説】

(1)

放物線 $C: y = x^2 - 2ax + 4a$ と直線 $y = -6x$ の共有点の x 座標は、 x についての方程式

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + 4a &= -6x \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(a-3)x + 4a &= 0 \end{aligned}$$

の解であるから、放物線 C と直線 $y = -6x$ が接するとき、この方程式の判別式を D とすると

$$D = 0$$

となるときである。よって、これを満たす a の値は

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-3)^2 - 4a &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a-9) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1, 9 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax + 4a \\ &= (x-a)^2 - a^2 + 4a \end{aligned}$$

より、 C の頂点の座標は $(a, -a^2 + 4a)$ である。この頂点の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{aligned} \begin{cases} X = a \\ Y = -a^2 + 4a \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} Y = -X^2 + 4X \\ X = a \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、 a がすべての実数を動くとき、 X はすべての実数を動くから、 C の頂点の軌跡の方程式は

$$y = -x^2 + 4x$$

である。

(3)

C が点 (x, y) を通るとき

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax + 4a \\ \Leftrightarrow 2(x-2)a &= x^2 - y \end{aligned}$$

となるから、これを満たすような実数 a が存在するための条件は

$$\begin{aligned} (2(x-2) \neq 0) \text{ または } (2(x-2) = 0 \text{ かつ } x^2 - y = 0) \\ \Leftrightarrow (x \neq 2) \text{ または } (x = 2 \text{ かつ } y = x^2) \\ \Leftrightarrow (x \neq 2) \text{ または } (y = 4) \end{aligned}$$

である。

(4)

$f(x) = x^2 - 2ax + 4a$ とおくと

$$f'(x) = 2x - 2a$$

であるから、 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow y &= (2t-2a)(x-t) + t^2 - 2at + 4a \\ \Leftrightarrow y &= (2t-2a)x - t^2 + 4a \end{aligned}$$

となる。この接線が点 $(3, -1)$ を通るとき

$$\begin{aligned} -1 &= (2t-2a) \cdot 3 - t^2 + 4a \\ \Leftrightarrow t^2 - 6t + 2a - 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるから、このような接線が存在するのは、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 t が存在するときであり、このとき t の 2 次方程式 $\textcircled{1}$ が実数解をもつ。よって、求める条件は、 $\textcircled{1}$ の判別式を D' とすると

$$\begin{aligned} D' &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3^2 - (2a-1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a &\leq 5 \end{aligned}$$

となる。

3

【解答】

- (1) ネ 3 ノ 6
(2) ハ 6 ヒ 3
(3) フ 3 ヘ 4 ホ 2 マ 3 ミ 3 ム 4 メ 3

【解説】

- (1) $\triangle ABC$ の面積を S とおく。 $\triangle ABC$ は一辺の長さが1の正三角形であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。また、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (AB + BC + CA) \cdot r \\ &= \frac{3}{2} r \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} &= \frac{3}{2} r \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となる。

- (2)

辺 AB の中点を M 、点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足を H とすると、図形の対称性より H は $\triangle ABC$ の内接円の中心、 M は $\triangle ABC$ の内接円と辺 AB の接点となるから

$$\begin{aligned} HM &= r \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} OM &= OA \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $\triangle OMH$ について三平方の定理より

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OM^2 - HM^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となり、これは正四面体 $OABC$ の高さである。

- (3)

P を通り底面 ABC に平行な平面と線分 OA 、 OB 、 OH の交点をそれぞれ A' 、 B' 、 H' とすると、 $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ であるから

$$\begin{aligned} A'B' &= AB \times \frac{OP}{OM} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} x \end{aligned}$$

となり、また $\triangle OMH \sim \triangle OPH'$ であるから

$$\begin{aligned} OH' &= OH \times \frac{OP}{OM} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} x \end{aligned}$$

となる。 $\triangle PBH'$ について $PB' = H'B' \cos \frac{\pi}{6}$ であるから

$$\begin{aligned} H'B' &= \frac{PB'}{\cos \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\because PB' = \frac{1}{2} AB' \right) \\ &= \frac{2}{3} x \end{aligned}$$

となり、 L が T に含まれるのは $H'B \leq r$ となるときであるから

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} x &\leq \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 L が T に含まれるような x の最大値 x_1 は

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。また、 $\triangle PBH'$ について $H'P = H'B' \sin \frac{\pi}{6}$ であるから

$$\begin{aligned} H'P &= \frac{2}{3} x \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} x \end{aligned}$$

となる。 $x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、線分 $A'B'$ と中心 H' で半径 r の円の交点を X 、 Y とおくと

$$H'X = H'Y = r$$

となり、 $\triangle H'XP$ について三平方の定理より

$$\begin{aligned} XP &= \sqrt{H'X^2 - H'P^2} \\ &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{3 - x^2} \end{aligned}$$

である。よって、 L と T の共通部分の長さを l とおくと

$$\begin{aligned} l &= XY \\ &= 2XP \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3 - x^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x = x_1$ のときの A' 、 B' をそれぞれ D 、 E とする。 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $P = M$ となるから、側面 OAB のうち T に含まれる部分の面積を S_1 とおくと

$$S_1 = \triangle ODE + \int_{x_1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} l dx$$

となる。

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} l dx &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{3} \sqrt{3 - x^2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right)^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

であり、 $\triangle ODE$ は一辺の長さが $\frac{2\sqrt{3}}{3} x_1$ の正三角形であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} x_1 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} x_1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \int_{x_1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} l dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。側面 OBC 、 OCA のうち T に含まれる部分の面積もともに S_1 であり、底面 ABC のうち T に含まれる部分は半径 r の円であるから、正四面体 $OABC$ の表面で T に含まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} 3S_1 + \pi r^2 &= 3 \cdot \frac{\pi}{12} + \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。

4

【解答】

- (1) モ -1 ヤ -1 ュ 1 ヨ -1 ラ 1 リ 2 ル -1
(2) レ -1 ロ -1 ワ 2 フ 1 ン 4

【解説】

(1) 出題ミス

曲線 $C: y = \log x$ と直線 $\ell: y = ax + b$ とが接しているとき、以下のように

$$b = -\log a - 1$$

となるが、ここで $e^{-1} < a < 1$ を満たすとき、 b は

$$-1 < b < 0$$

を満たす。したがって、 $b > 0$ を満たすような実数 a, b は存在しないことになる。

以下、実数 b についての条件を考えずに解答することにする。

$F(x) = \log x$ とおくと

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

であるから、曲線 $C: y = F(x)$ 上の点 $(p, F(p))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= F'(p)(x - p) + F(p) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x}{p} + \log p - 1 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。曲線 C と直線 $\ell: y = ax + b$ とが接しているとする、 $\textcircled{1}$ と $y = ax + b$ が一致するから

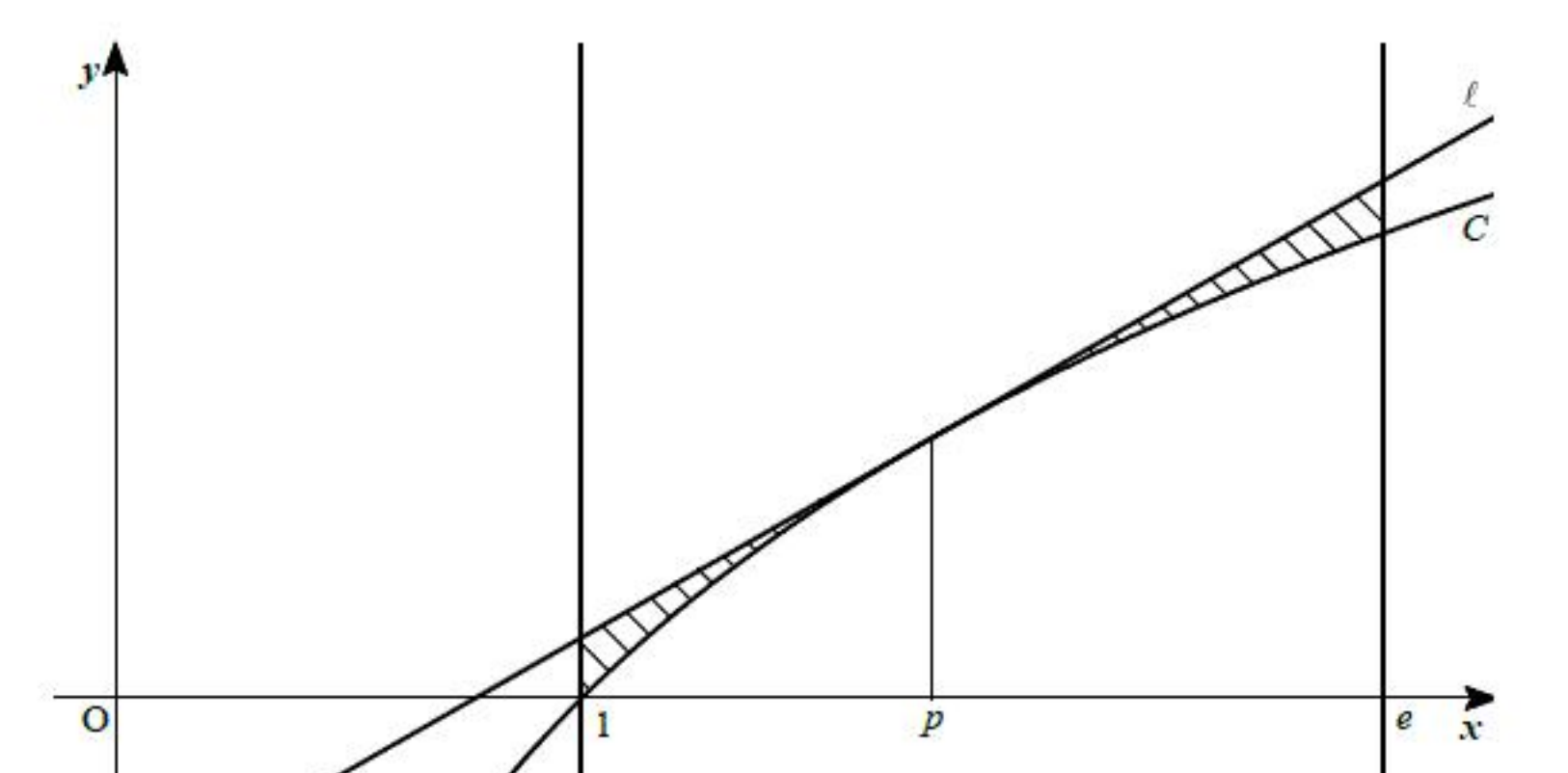
$$\begin{cases} a = \frac{1}{p} \\ b = \log p - 1 \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} b &= \log \frac{1}{a} - 1 \\ &= -\log a - 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $e^{-1} < a < 1$ のとき、 $a = \frac{1}{p}$ より $1 < p < e$ であるから、曲線 C と直線 ℓ の接点は

$1 < x < e$ の範囲に存在する。よって、曲線 C と 3 つの直線 ℓ , $x = 1$, $x = e$ とで囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



よって、上図の斜線部の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^e \{(ax + b) - \log x\} dx \\ &= \left[\frac{a}{2} x^2 + bx - x \log x + x \right]_1^e \\ &= \frac{a}{2} (e^2 - 1) + b(e - 1) - 1 \\ &= \frac{a}{2} (e^2 - 1) + (-\log a - 1)(e - 1) - 1 \\ &= \frac{a}{2} (e^2 - 1) - (e - 1) \log a - e \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{1}{2} (e^2 - 1) - (e - 1) \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{2a} (e - 1) \{(e + 1)a - 2\} \end{aligned}$$

であるから、 $e^{-1} < a < 1$ のとき関数 $S(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	e^{-1}	$\cdots$	$\frac{2}{e+1}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	$\diagdown$	-	0	+	$\diagup$
$S(a)$	$\diagdown$	$\searrow$		$\nearrow$	$\diagup$

以上より、 $S(a)$ の最小値は

$$\begin{aligned} S\left(\frac{2}{e+1}\right) &= \frac{1}{2} (e^2 - 1) \cdot \frac{2}{e+1} - (e - 1) \log\left(\frac{2}{e+1}\right) - e \\ &= e - 1 + (e - 1) \log\left(\frac{e+1}{2}\right) - e \\ &= (e - 1) \log\left(\frac{e+1}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

で与えられる。

(2)

$t = e^{-u}$ とおくと、 $e^{-k} < t < 1$ であるから $0 < u < k$ であり、 $0 \leq x \leq k$ において

$$|e^{-x} - t| = \begin{cases} e^{-x} - e^{-u} & (0 \leq x \leq u) \\ -e^{-x} + e^{-u} & (u \leq x \leq k) \end{cases}$$

となるから

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^k |e^{-x} - t| dx \\ &= \int_0^u (e^{-x} - e^{-u}) dx + \int_u^k (-e^{-x} + e^{-u}) dx \\ &= [-e^{-x} - e^{-u}x]_0^u + [e^{-x} + e^{-u}x]_u^k \\ &= (k - 2u - 2)e^{-u} + e^{-k} + 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(u) = (k - 2u - 2)e^{-u} + e^{-k} + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(u) &= -2e^{-u} + (k - 2u - 2)(-e^{-u}) \\ &= (2u - k)e^{-u} \end{aligned}$$

であるから、 $0 < u < k$ における関数 $g(u)$ の増減表は以下のようになる。

u	0	$\cdots$	$\frac{k}{2}$	$\cdots$	k
$g'(u)$	$\diagdown$	-	0	+	$\diagup$
$g(u)$	$\diagdown$	$\searrow$		$\nearrow$	$\diagup$

よって、 t が $e^{-k} < t < 1$ の範囲を動くときの関数 $f(t)$ の最小値 $M(k)$ は

$$\begin{aligned} M(k) &= g\left(\frac{k}{2}\right) \\ &= -2e^{-\frac{k}{2}} + e^{-k} + 1 \\ &= \left(-1 + e^{-\frac{k}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +0} \frac{M(k)}{k^2} &= \lim_{k \rightarrow +0} \frac{\left(-1 + e^{-\frac{k}{2}}\right)^2}{k^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow +0} \frac{1}{4} \left(\frac{-1 + e^{-\frac{k}{2}}}{-\frac{k}{2}} \right)^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow +0} \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-\frac{k}{2}} - e^0}{-\frac{k}{2} - 0} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $h(x) = e^x$ とおくと $h'(x) = e^x$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +0} \frac{M(k)}{k^2} &= \lim_{k \rightarrow +0} \frac{1}{4} \left(\frac{h\left(-\frac{k}{2}\right) - h(0)}{-\frac{k}{2} - 0} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} h'(0) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。