

(2012年度)

4 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は6ページ, 3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。（0または正数の場合は、符号欄にマークしない。）

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。（符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。）

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) $f(x) = \left| 2 \sin x - \cos 2x + \frac{1}{2} \right|$ とおく。 $\sin x =$ ア のとき

$f(x)$ は最大値 $\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$ をとる。また、 $\sin x = \frac{\text{エ} + \sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$

のとき $f(x)$ は最小値 キ をとる。

(2) x, y, z は次の条件を満たす実数とする。

$$0 \leq x \leq y \leq z \leq \frac{4}{5}, \quad x + 2y + z = 1$$

このとき、 y の最小値は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ 、最大値は $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である。

(3) 不等式

$$\log_2 x - 6 \log_x 2 \geq 1$$

の解は

$$\frac{\text{シ}}{\text{ス}} \leq x < \text{セ}, \quad x \geq \text{ソ}$$

である。

2 a, b を実数とし, C_1, C_2 をそれぞれ次の2次関数のグラフとする。

$$C_1: y = x^2, \quad C_2: y = -(x-a)^2 + 2a + b$$

(1) C_1 と C_2 が共有点をもつための条件を a と b で表すと

$$a^2 + \boxed{\text{タ}} a + \boxed{\text{チ}} b \leq 0$$

となる。特に b のとりうる値の範囲は $b \geq \boxed{\text{ツ}}$ であり, $b = \boxed{\text{ツ}}$ のとき C_1 と C_2 はただ1つの共有点 $(\boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{ト}})$ をもつ。

(2) $b = 6$ とし, C_1 と C_2 は共有点をもつとすると,

$$\boxed{\text{ナ}} \leq a \leq \boxed{\text{ニ}}$$

である。このとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形を D とすると, D の面積 S は

$$S = \frac{1}{3} \left(\boxed{\text{ヌ}} a^2 + \boxed{\text{ネ}} a + \boxed{\text{ノ}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

と表される。 $a = \boxed{\text{ハ}}$ のとき S は最大値 $\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ をとる。

(3) $a = \boxed{\text{ハ}}$, $b = 6$ とし, C_1 と C_2 で囲まれた図形を D_0 とす

る。点 $P(x, y)$ が D_0 内を動くとき, $x + 2y$ の最大値は $\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$,

最小値は $\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。

3

座標平面上の点 (x, y) のうち, x, y がともに整数である点を格子点とよぶ。いま, 格子点の集合 A を次のように定義する。

$$A = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 16 < x^2 + y^2 \leq 36, x \text{ と } y \text{ は整数} \}$$

(1) A の点は全部で ム 個ある。

(2) 格子点上を 1 秒間に右または上に 1 動く点 P を考える。 P は原点から出発し, A の点の 1 つに到達したら停止する。このとき, P が到達できない A の点は全部で メ 個ある。以下, P が到達できる A の部分集合を A_0 とする。

(3) (2) で考えた点 P が右に動く確率と上に動く確率をともに $\frac{1}{2}$ とする。また, 各格子点における P の動きは, その点に至るまでの動き方と独立に決まるものとする。

(i) 原点からの経路の数が最も多い A_0 の点は

Q (モ , ヤ) であり, P が Q に到達する確率は

$\frac{\text{ ユ}}{\text{ ヨ}}$ である。

(ii) 原点からの経路の数が Q の次に多い A_0 の点は全部で

ラ 個あり, それらの点のいずれかで P が停止する確率は

$\frac{\text{ リ}}{\text{ ル}}$ である。

(iii) P が A_0 の点のいずれかで停止するまでの時間の期待値は

$\frac{\text{ レ}}{\text{ ロ}}$ 秒である。

