

(2012年度)

6 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は7ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机の上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は，HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでいねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

- 1 (1) $\triangle OAB$ に対し,

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

とする。また, $\triangle OAB$ の面積を S とする。

- (i) $1 \leq s+t \leq 3$ のとき, 点 P の存在しうる領域の面積は S の

ア 倍である。

- (ii) $1 \leq s+2t \leq 3$ のとき, 点 P の存在しうる領域の面積は S の

の イ 倍である。

- (2) $(\sqrt{2})^n$ は n が奇数のとき無理数である。より一般に, 2 以上の整数 k に対し, $(\sqrt[k]{2})^n$ は n が k の倍数でないとき無理数である。したがって, 2 以上の整数 k に対し,

$$\left(\sqrt{2}x + \sqrt[k]{2}\right)^{100}$$

を展開して得られる x の多項式において,

- (i) x^{100} の係数は 2 の ウ 乗,

- (ii) $n = 0, 1, \dots, 100$ に対し, x^n の係数が整数となるような n の個数は

$k = 2$ のとき エ 個

$k = 3$ のとき オ 個

$k = 5$ のとき カ 個

$k = 7$ のとき キ 個

$k = 51$ のとき ク 個

である。

2 xy 平面上で次の不等式の表す領域を D とする。

$$\log_2(2y+1) - 1 \leq \log_2 x \leq 2 + \log_2 y \leq \log_2 x + \log_2(4-2x)$$

(1) D は次の不等式

$$x \leq \boxed{\text{ケ}} y \leq \boxed{\text{コ}} x^2 + \boxed{\text{サ}} x$$

および

$$y \leq \boxed{\text{シ}} x + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

により定まる領域である。

(2) D の面積は $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(3) $s < 1$ とし、点 (x, y) が D 上を動くとき、 $y - sx$ の最大値を $f(s)$ とする。

(i) $\boxed{\text{チ}} \leq s < 1$ のとき、 $f(s) = \boxed{\text{ツ}} s + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$

(ii) $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \leq s < \boxed{\text{チ}}$ のとき、

$$f(s) = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} s^2 + \boxed{\text{ノ}} s + \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

(iii) $s < \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のとき、 $f(s) = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} s + \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}}$

である。

- 3 右の図1のように3×3のマスのマスがあり、各マスに番号が書いてある。AとBが、これらのマスを以下の条件(i)～(iv)に従って互いに独立に移動していく。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

図1

- 条件(i) Aは一番上のマス1, 2, 3のいずれかから、また、Bは一番下のマス7, 8, 9のいずれかから出発する。
- 条件(ii) A, Bが出発するマスは、それぞれ等しい確率で選ばれる。
- 条件(iii) Aは下の段へ、Bは上の段へ1段ずつ2回動く。
- 条件(iv) Aの1回ごとの動きは、図2の場合は3通り、図3の場合はそれぞれ2通りある。また、それぞれ等しい確率で次のマスに動くものとする。Bの1回ごとの動きについても同様である。

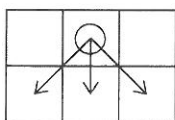


図2

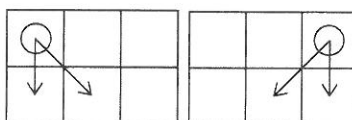


図3

例えばAの移動 $\boxed{1} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{7}$ を考えると、その確率は $\frac{1}{12}$ である。

- (1) Aの移動の場合の数は $\boxed{\text{ミ}}$ 通りである。そのうち、移動の確率が最も小さいものは $\boxed{\text{ム}}$ 通りあり、その移動の確率は

$$\frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}} \text{ である。}$$

- (2) AとBがともに奇数の番号のマスしか通らない確率は $\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ である。

(3) A と B が中段のマス 4, 5, 6 で同じマスを通る確率は $\frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$ である。

n を自然数とし, $(2n+1) \times (2n+1)$ のマスの場合を考える。このとき, A と B が 3×3 のマスの場合と同様に移動するものとする。

(4) A と B が移動したマスを合わせたものが 2 つの対角線上のすべてのマスとなる確率は

$$\frac{1}{p^2 \cdot 3^q}$$

である。ただし, $p = \boxed{\text{リ}} n + \boxed{\text{ル}}$, $q = \boxed{\text{レ}} n + \boxed{\text{ロ}}$ である。

