

(2012年度)

## 7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ, 4問である。)

### 受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

## マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。  
(0 または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

| 符号 | 10 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| －  | 0      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z | 0     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z |
| ○  | ●      | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○     | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ● | ○ | ○ | ○ |

〔解答記入例 -26〕

| 符号 | 10 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| －  | 0      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z | 0     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z |
| ●  | ○      | ○ | ● | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○     | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ● | ○ | ○ | ○ |

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$  を、 $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$  とする。

0 を、 $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$  とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  を、 $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \sqrt{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$  とする。

1

(1) 関数

$$f(x) = 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + a \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

の最小値が  $\sqrt{3}$  であるとする。このとき、 $a =$  ア であり、

$f(x)$  が最小となるのは  $x = \frac{\pi}{\text{イ}}$  のときである。

イ

(2)  $n$  を 5 以上の自然数とする。1 以上  $n$  以下の自然数から互いに隣り合わない 2 つを選ぶ組合せは

$$\frac{1}{\text{ウ}} \left( n - \text{エ} \right) \left( n - \text{オ} \right)$$

通りあり、どの 2 つも隣り合わない 3 つを選ぶ組合せは

$$\frac{1}{\text{カ}} \left( n - \text{キ} \right) \left( n - \text{ク} \right) \left( n - \text{ケ} \right)$$

通りある。ただし、エ < オ , キ < ク < ケ とする。

(3) 三角形 OAB において、辺 OA を 1 : 3 に内分する点を C、辺 OB を 4 : 3 に内分する点を D とし、線分 AD と BC との交点を P とする。AP : PD =  $s : (1 - s)$ 、BP : PC =  $t : (1 - t)$  とするとき

$$s = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}, \quad t = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}$$

である。また、OP の延長と辺 AB との交点を Q とするとき

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}} \overrightarrow{OP}$$

である。

2  $a$  を実数とし、放物線  $C : y = x^2 - 2ax + 4a$  を考える。

(1)  $C$  が直線  $y = -6x$  と接するのは、 $a =$   または  $a =$

のときである。ただし、  $<$   とする。

(2)  $a$  がすべての実数を動くとき、 $C$  の頂点の軌跡の方程式は

$$y = \text{  } x^2 + \text{  } x + \text{  }$$

である。

(3)  $C$  が点  $(x, y)$  を通るような  $a$  が存在するための必要十分条件は

$$\left( x \text{   } \right) \quad \text{  } \quad \left( y \text{   } \right)$$

である。

(4) 点  $(3, -1)$  を通る  $C$  の接線が存在するための必要十分条件は

$$a \text{   }$$

である。

,  ,  の選択肢 :

(a)  $<$     (b)  $\leq$     (c)  $>$     (d)  $\geq$     (e)  $=$     (f)  $\neq$

の選択肢 :

(a) かつ    (b) または

- 3 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。底面 ABC の内接円の半径を  $r$  とおき、頂点 O を通り底面 ABC に垂直な直線からの距離が  $r$  以下である点全体からなる円柱を  $T$  とする。

$$(1) r = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}} \text{ である。}$$

$$(2) \text{ 正四面体 OABC の高さは } \frac{\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \text{ である。}$$

- (3) 辺 AB の中点と頂点 O とを結ぶ線分上に点 P をとり、 $x = OP$  とおく。P を通り底面 ABC に平行な平面による側面 OAB の切り口を  $L$  とする。

$L$  が  $T$  に含まれるような  $x$  の最大値を  $x_1$  とすると

$$x_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

$x_1 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき、 $L$  と  $T$  の共通部分の長さは

$$\frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} \sqrt{\frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}} - x^2}$$

である。

正四面体 OABC の表面で  $T$  に含まれる部分の面積は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{メ}}}$$

である。

4  $\log x$  は自然対数,  $e$  は自然対数の底を表す。

- (1)  $a, b$  は  $e^{-1} < a < 1, b > 0$  を満たす実数とする。曲線  $C: y = \log x$  と直線  $\ell: y = ax + b$  とが接しているとする、

$$b = \boxed{\text{モ}} \log a + \boxed{\text{ヤ}}$$

が成り立つ。このとき、曲線  $C$  と 3 つの直線  $\ell, x = 1, x = e$  とで囲まれた図形の面積を  $S(a)$  とする。 $a$  が  $e^{-1} < a < 1$  の範囲を動くときの  $S(a)$  の最小値は

$$\left( \boxed{\text{ユ}} e + \boxed{\text{ヨ}} \right) \log \left( \frac{e + \boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}} \right) + \boxed{\text{ル}}$$

で与えられる。

- (2)  $k$  を正の定数とし、 $e^{-k} < t < 1$  である  $t$  に対して、

$$f(t) = \int_0^k |e^{-x} - t| dx$$

とおく。 $t$  が  $e^{-k} < t < 1$  の範囲を動くときの関数  $f(t)$  の最小値を  $M(k)$  とおくと、

$$M(k) = \left( \boxed{\text{レ}} + e^P \right)^2, \quad \text{ただし } P = \frac{\boxed{\text{ロ}}}{\boxed{\text{ワ}}} k$$

となる。このとき

$$\lim_{k \rightarrow +0} \frac{M(k)}{k^2} = \frac{\boxed{\text{ヲ}}}{\boxed{\text{ン}}}$$

である。



