

1

- (1) ア 1 イ 3 ウ -1 エ 2
オ 1 カ 6
(2) キ 4 ク 5
(3) ケ 0 コ -1 サ 1 シ 3
ス 4

【解説】

(1)

$f(0)=0$ であり、 $f(x)$ は3次の整式であるから、 $f(x)$ は実数 p, q, r を用いて

$$f(x)=px^3+qx^2+rx$$

と表せる。

$$\begin{aligned} f(a+1) &= p(a+1)^3 + q(a+1)^2 + r(a+1) \\ &= pa^3 + (3p+q)a^2 + (3p+2q+r)a + (p+q+r) \\ f(a) &= pa^3 + qa^2 + ra \end{aligned}$$

であるから、

$$f(a+1) - f(a) = 3pa^2 + (3p+2q)a + (p+q+r) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。条件より

$$f(a+1) - f(a) = a^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow a^2 = 3pa^2 + (3p+2q)a + (p+q+r) \\ &\Leftrightarrow (3p-1)a^2 + (3p+2q)a + (p+q+r) = 0 \end{aligned}$$

となる。上式が任意の実数 a について成り立つとき

$$\begin{cases} 3p-1=0 \\ 3p+2q=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$$

である。これを解くと

$$(p, q, r) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right)$$

となる。以上より、求める $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

である。

(2)

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

の両辺を二乗することで

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \frac{49}{25} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{49}{25} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{49}{25} - 1 \\ \therefore \sin \theta \cos \theta &= \frac{12}{25} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

とわかる。①、②より解と係数の関係を考えると、 $\sin \theta, \cos \theta$ は x の2次方程式

$$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{12}{25} = 0$$

の2解である。

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{12}{25} &= 0 \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 35x + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5x-3)(5x-4) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \end{aligned}$$

となり、 $\sin \theta > \cos \theta$ であることから

$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

とわかる。

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax - a^2 \\ &= (x+a)(3x-a) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は $a \neq 0$ のとき、 $x = -a, \frac{1}{3}a$ で極値をとる。次に、 $f(x)=0$ がただ1つの実

数解を持つような整数 a の最大値を求める。 $a=0$ のとき

$$f(x) = x^3$$

であるから、このとき $f(x)=0$ はただ1つの実数解をもつ。よって、 $a>0$ のとき、 $f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつような整数が存在するのか調べ、また存在するならばその a の最大値を求める。 $a>0$ のとき、 $f(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって、 $f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつための条件は

$$f(-a) < 0 \quad \text{または} \quad f\left(\frac{a}{3}\right) > 0 \quad \cdots (*)$$

となることである。

$$\begin{aligned} f(-a) &= (-a)^3 + a(-a)^2 - a^2(-a) + 3a \\ &= a^3 + 3a \\ &= a(a^2 + 3) \end{aligned}$$

であるから、 $a>0$ のとき $f(-a)<0$ を満たすような a は存在しないが、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{3}\right) &= \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{a}{3}\right)^2 - a^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3a \\ &= \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)a^3 + 3a \\ &= -\frac{5}{27}a^3 + 3a \\ &= -\frac{5}{27}a\left(a + \frac{9}{\sqrt{5}}\right)\left(a - \frac{9}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

であるので

$$(*) \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{\sqrt{5}}$$

とわかる。 $4 < \frac{9}{\sqrt{5}} < 5$ であることから、求める整数 a の最大値は4である。

2

- (1) セ 1 ソ 1 タ 6
 (2) チ 2 ツ 5 テ 2 ト -3 ナ 2
 (3) ニ 5 ヌ 2 ネ 3 ノ 2
 (4) ハ 1 ヒ 2 フ 2

【解説】

(1)

$AD:CD = S_1:S_2 = 1:2$ であることから

$$AD = 3 \cdot \frac{1}{1+2} = 1$$

と求まる。また、

$$\triangle PDA = \frac{1}{3} S_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1+2+3} S = \frac{1}{6} S$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1+2+3} S \\ &= \frac{1}{6} S \end{aligned}$$

であるから、

$$BP:PD = \triangle ABP:\triangle APD = 1:1$$

$$\therefore BD = 2BP$$

とわかる。また、 $\triangle ABD$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} BD^2 &= 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos \alpha \\ &= 10 - 6 \cos \alpha \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} BP^2 &= \left(\frac{1}{2} BD \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (10 - 6 \cos \alpha) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos \alpha \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$BP = PD$ より、 $\triangle ABD$ において中線定理を用いると

$$\begin{aligned} AB^2 + AD^2 &= 2(AP^2 + BP^2) \\ \Leftrightarrow AP^2 &= \frac{1}{2} (AB^2 + AD^2) - BP^2 \\ &= \frac{1}{2} (3^2 + 1^2) - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos \alpha \right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos \alpha \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

(2), (3)より

$$\begin{aligned} \left(\frac{BP}{AP} \right)^2 &= \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos \alpha}{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos \alpha} \\ &= \frac{5 - 3 \cos \alpha}{5 + 3 \cos \alpha} \\ &= \frac{10}{5 + 3 \cos \alpha} - 1 \end{aligned}$$

である。 α は三角形の内角であり

$$0 < \alpha < \pi$$

$$\therefore -1 < \cos \alpha < 1$$

が成り立つので、

$$\frac{1}{4} < \frac{10}{5 + 3 \cos \alpha} - 1 < 4$$

である。 $\frac{BP}{AP} > 0$ であるから

$$\frac{1}{2} < \frac{BP}{AP} < 2$$

と求まる。

- (1) へ 20
 (2) ホ 84
 (3) マ 148
 (4) ミ 148
 (5) ム 384

【解説】

(1)

GからCまで行く最短経路は1通りあり、CからAまで行く最短経路は

$$\frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ [通り]}$$

ある。よって、Cを通過してGからCまで行く最短経路は

$$1 \cdot 20 = 20 \text{ [通り]}$$

ある。

(2)

立方体を展開したときにできる長方形GDAFについて考える。辺BC上の少なくとも1つの点を通してGからAまで行く最短経路はこの長方形に現れるので、

$$\frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ [通り]}$$

である。

(3)

辺CD上の少なくとも1つの点を通してGからAまで行く最短経路は、長方形GHABに現れて全部で84通りある。このことと(1)、(2)の結果を考えれば、辺BCもしくは辺CD上の少なくとも1つの点を通してGからAまで行く最短経路は

$$84 \times 2 - 20 = 148 \text{ [通り]}$$

あることがわかる。

(4)

Eを通過してGからCまで行く最短経路は20通りある。(3)と同様に考えると、辺EFもしくは辺EH上の少なくとも1つの点を通してGからAまで行く最短経路は

$$84 \times 2 - 20 = 148 \text{ [通り]}$$

あることがわかる。

(5)

GからAまで行く最短経路のうち、辺BC上の少なくとも1つの点を通るものは84通りある。同様にして、辺BF、DC、DH、EF、EHについても84通りずつある。これらをすべて足し合わせると、点B、C、D、E、F、Hを通る最短経路について2回ずつ数えていることになる。以上のことから、GからAまで行く最短経路は全部で

$$84 \times 6 - 20 \times 6 = 384 \text{ [通り]}$$

ある。