

1

【解説】

- (1) ア, イ, ウ $-1, 3, 2$
 (2) エ, オ $1, 3$
 カ 8
 キ 9
 ク -1
 (3) ケ, コ, サ $-2, 1, 3$

【解説】

(1)

$x^2 \sin \theta - x \cos 2\theta + \sin \theta = 0$ の判別式を D とすると、重解を持つとき、 $D=0$ となるので、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 2\theta - 4 \sin^2 \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - 2 \sin^2 \theta)^2 - 4 \sin^2 \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 4 \sin^2 \theta + 4 \sin^4 \theta - 4 \sin^2 \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 \sin^4 \theta - 8 \sin^2 \theta + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} \quad (\because \sin \theta < 1) \\ \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{2} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \\ \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} y &= \left(\log_3 \frac{x}{27} \right) \left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{x} \right) \\ &= (\log_3 x - 3) \left(\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 \frac{1}{3}} \right) \\ &= -(\log_3 x - 3)(1 - \log_3 x) \end{aligned}$$

となるので、 $A = \log_3 x$ とすると、

$$\begin{aligned} y &= A^2 - 4A + 3 \\ &= (A - 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \leq x \leq 27 \\ \Leftrightarrow -1 \leq A \leq 3 \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{cases} A = -1, \text{ すなわち } x = \frac{1}{3} \text{ のとき最大値 } 8 \\ A = 3, \text{ すなわち } x = 27 \text{ のとき最小値 } -1 \end{cases}$$

をとる。

(3)

整式 $Q(x)$, $Q'(x)$ を用いて、

$$\begin{cases} P(x) = (x - 2)Q(x) - 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ P(x) = (x^2 + x + 3)Q'(x) + 3x + 9 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

とおける。ここで、 $Q''(x)$ と実数 a を用いて、

$$P(x) = (x^2 + x + 3)\{(x - 2)Q''(x) + a\} + 3x + 9 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

とすると、 $x=2$ を代入して①と連立させると、

$$\begin{aligned} 9a + 15 &= -3 \\ \Leftrightarrow a &= -2 \end{aligned}$$

となる。よって、これを③に代入すると、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + x + 3)(x - 2)Q''(x) - 2(x^2 + x + 3) + 3x + 9 \\ &= (x^3 - x^2 + x - 6)Q''(x) - 2x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

となるので、求める余りは、

$$-2x^2 + x + 3$$

である。

【解答】

(1)	シ, ス	1, 3
(2)	セ, ソ, タ, チ	4, 5, 3, 5
(3)	ツ, テ	1, 8
	ト, ナ, ニ	-1, 2, 2
	ヌ, ネ	-1, 2
	ノ, ハ, ヒ, フ, ヘ	-1, 7, 5, 7, 2

【解説】

- (1) m の傾きを $\tan \alpha$ とし, l の傾きを $\tan \beta = 2$ とすると,

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \tan \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \beta \cdot \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$m: y = \frac{1}{3}x$$

である。

- (2) $OP = 1$ であるので, $P(\cos \gamma, \sin \gamma)$ とおき, 実数 a を用いて, $Q(0, a)$ とおくと, PQ と l が直交し, PQ の中点が l 上にあるので,

$$\begin{cases} \frac{\sin \gamma - a}{\cos \gamma} = -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1} \\ \frac{\sin \gamma + a}{2} = 2 \times \frac{\cos \gamma}{2} \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。②より,

$$a = 2 \cos \gamma - \sin \gamma$$

となるので①に代入して, 題意より $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\frac{2 \sin \gamma - 2 \cos \gamma}{\cos \gamma} &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 4 \sin \gamma &= 3 \cos \gamma \\ \Leftrightarrow 16 \sin^2 \gamma &= 9 \cos^2 \gamma \\ \Leftrightarrow 16 \sin^2 \gamma &= 9(1 - \sin^2 \gamma) \\ \Leftrightarrow \sin^2 \gamma &= \frac{9}{25} \\ \Leftrightarrow \sin \gamma &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow \cos \gamma &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

となる。よって, P の座標は $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$ である。

- 3) $\triangle PQR$ の面積を $S(\theta)$ とおくと,

$$\begin{aligned}S(\theta) &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(2\theta) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2\theta + \sin 2\theta - 1)\end{aligned}$$

となる。また, 題意より,

$$\angle QOR = \frac{\pi}{4}$$

と一定となる。よって, $\triangle PQR$ の面積が最大となるのは, OP が最大となるときである。ゆえに,

$$\begin{aligned}2\theta &= \frac{\pi}{2} - 2\theta \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

である。最大となる $\triangle PQR$ は,

$$\begin{aligned}S\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1}{2} \left(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{8} + \sin 2 \cdot \frac{\pi}{8} - 1 \right) \\ &= \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

となる。このとき, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ であるから,

$$\begin{aligned}\tan \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} \\ &= -1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

とわかる。したがって, 直線 OP の傾きは,

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \theta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \theta}{1 - \tan \alpha \tan \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \sqrt{2} - 1}{1 - \frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{-1}{7} + \frac{5}{7}\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

3

【解答】

- (1) ホ 2 マ 3 ミ 2
 (2) (i) ム 7 メ 24 (ii) モ 5 ヤ 24 (iii) ユ 13 ヨ 24
 (iv) ラ 95 リ 576 (v) ル 241 レ 384

【解説】

- (1) a, b の期待値をそれぞれ E_a, E_b とする。さいころを投げたとき a の目が出る確率を $P_a(a)$ とすると $P_a(1)=P_a(2)=P_a(3)=\frac{1}{3}$ であるので

$$\begin{aligned} E_a &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。3枚の硬貨を投げたときに表が b 枚出る確率を $P_b(b)$ とする。3枚の硬貨を投げたときの裏表の出方の全事象は $2^3=8$ 通りである。したがって

$$P_b(0)=P_b(3)=\frac{1}{8}$$

となる。また表と裏の対等性より

$$P_b(1)=P_b(2)$$

であり、全確率の和は1であるから

$$P_b(0)+P_b(1)+P_b(2)+P_b(3)=1$$

となる。したがって以上より

$$\begin{aligned} P_b(1) &= \frac{1}{2} \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} E_b &= 0 \cdot P_b(0) + 1 \cdot P_b(1) + 2 \cdot P_b(2) + 3 \cdot P_b(3) \\ &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{12}{8} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

- (2)
 (i) a, b の値は独立に決まるので、引き分けになるすなわち $a=b$ となる確率は、 $b \neq 0$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 P_a(k)P_b(k) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

となる。

- (ii) a は 1, 2, 3 であり、 b は 0, 1, 2, 3 のいずれかである。よって、 B 君が勝つ、すなわち $a < b$ となるのは $b=2, 3$ の場合である。 b の値によって場合分けして考える。

[i] $b=2$ のとき

このとき B 君が勝つのは $a=1$ のときであるので、 B 君が勝つ確率は

$$\begin{aligned} P_b(2)P_a(1) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。

[2] $b=3$ のとき

このとき B 君が勝つのは $a=1, 2$ のときであるので、 B 君が勝つ確率は

$$\begin{aligned} P_b(3)\{P_a(1)+P_a(2)\} &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

となる。

以上[i], [2]より1回の勝負で、 B 君が勝つ確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$$

となる。

- (iii) 2回の勝負で A 君が勝った回数のほうが B 君の勝った回数より多くなるのは、 A 君が2回とも勝つ場合と、 A 君が1回勝ち他の1回は引き分けになる場合である。この2つの場合に場合分けして考える。

[1] A 君が2回とも勝つ場合

(i), (ii)の結果より1回の勝負で A 君が勝つ確率は

$$1 - \frac{7}{24} - \frac{5}{24} = \frac{1}{2}$$

である。よって A 君が2回とも勝つ確率は

$$\left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

である。

[2] A 君が1回勝ち他の1回は引き分けである場合

このとき A 君が何回目に勝つかを考えると、このようになる確率は

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{24}$$

となる。

以上[i], [ii]より2回の勝負で A 君が勝った回数のほうが B 君の勝った回数より多くなる確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{7}{24} = \frac{13}{24}$$

となる。

- (iv) 2回の勝負で B 君が勝った回数のほうが A 君の勝った回数より多くなるのは、 B 君が2回とも勝つ場合と、 B 君が1回勝ち他の1回は引き分けになる場合である。この2つの場合に場合分けして考える。

[1] B 君が2回とも勝つ場合

B 君が2回とも勝つ確率は

$$\left(\frac{5}{24} \right)^2 = \frac{25}{24^2}$$

である。

[ii] B 君が1回勝ち他の1回は引き分けである場合

このとき B 君が何回目に勝つかを考えると、このようになる確率は

$$2 \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{7}{24} = \frac{70}{24^2}$$

となる。

以上[i], [ii]より2回の勝負で B 君が勝った回数のほうが A 君の勝った回数より多くなる確率は

$$\frac{25}{24^2} + \frac{70}{24^2} = \frac{95}{576}$$

となる。

- (v) 3回の勝負で A 君が勝った回数のほうが B 君の勝った回数より多くなるのは、2回目までに A 君が2回勝つ場合と、2回目までに A 君が1回勝ち他の1回は引き分けであり3回目に A 君が負けない場合と、2回目まではともに引き分けで3回目に A 君が勝つ場合がある。この3つの場合に分けて考える。

[1] 2回目までに A 君が2回勝つ場合

このとき3回目の勝負に関わらず A 君が勝った回数のほうが B 君の勝った回数より多いので、求める確率は(iii)の[1]より $\frac{1}{4}$ である。

[2] 2回目までに A 君の1勝, 1引き分けであり3回目に A 君が負けない場合

2回目までに A 君の1勝, 1引き分けである確率は(iii)の[2]より $\frac{7}{24}$ である。したがって求める確率は

$$\frac{7}{24} \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{24} \right) = \frac{133}{576}$$

となる。

[3] 2回目まではともに引き分けで3回目に A 君が勝つ場合

このとき求める確率は

$$\left(\frac{7}{24} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{1152}$$

となる。

[4] 2回目までに A 君の1勝, 1敗で3回目に A 君が勝つ場合

このとき求める確率は

$$2 \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{48}$$

となる。

以上[1], [2], [3], [4]より求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{133}{576} + \frac{49}{1152} + \frac{5}{48} = \frac{241}{384}$$

となる。