

1

【解答】

(1)

ア	イ	ウ	エ
2	-2	7	3

(2)

オ	カ	キ	ク	ケ
4	0	2	4	6

(3)

コ	サ	シ
-6	-6	36

【解説】

(1)

$\tan \theta = t$ とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $t > 0$ である。2 倍角の公式より、

$$\tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

なので、

$$\tan 2\theta + \tan \theta - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t}{1-t^2} + t - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t + (3t-2)(1-t^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^3 - 2t^2 - 9t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(3t^2 + 4t - 1) = 0$$

$$\therefore t = \tan \theta = 2, \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \quad (\because t > 0)$$

となる。

(2)

a は 1 でない正の実数である。仮に $a=1$ とすると

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{12} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -1, 6$$

となるので、

$$x \neq -1, 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 $a > 0$ より

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{12} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < 2, 3 < x \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②と x が $-6 \leq x \leq 6$ を満たす整数であることから、

$$x = -6, -5, -4, -3, -2, 0, 1, 4, 5 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。また、 $\log_a y = -1$ より

$$y = a^{-1} = \frac{12}{x^2 - 5x + 6} = \frac{12}{(x-2)(x-3)}$$

となる。この式に③の各 x の値を代入して、 y が整数となる (x, y) の組を求めると

$$(x, y) = (0, 2), (1, 6), (4, 6), (5, 2)$$

となる。したがって、題意を満たす組 (x, y) は 4 個ある。この中で $x+y$ が最小となる組は

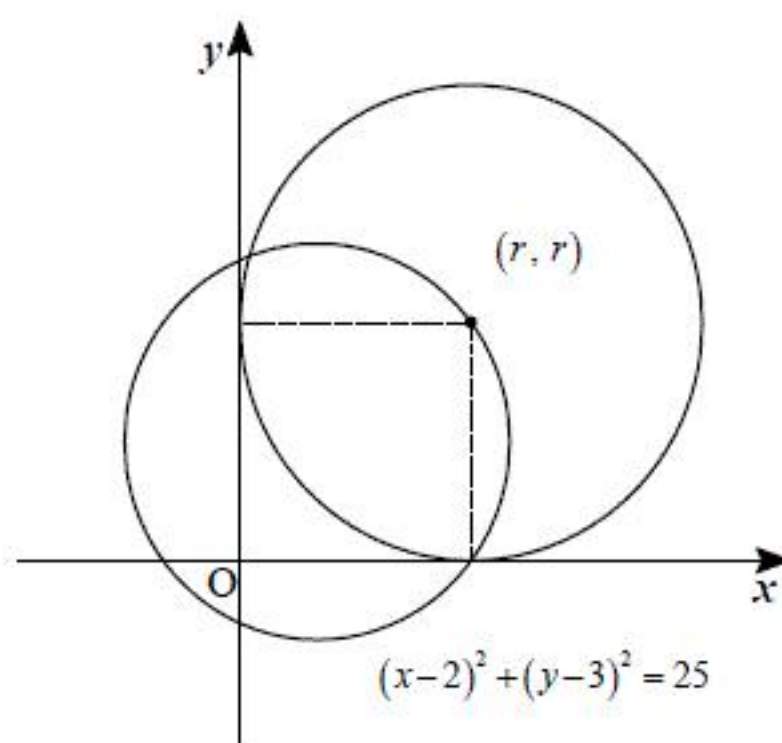
$$(x, y) = (0, 2)$$

であり、 $x+y$ が最大となる組は

$$(x, y) = (4, 6)$$

である。

(3)



上のグラフより、円 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 上に中心があり、 x 軸と y 軸の両方に接する円の半

径が最大になるのは、円の中心が第一象限にあるときである。題意の円の半径を $r(>0)$ とす

ると、円の中心の座標は (r, r) であり、これが円 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 上にあることから

$$(r-2)^2 + (r-3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2r^2 - 10r - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (r+1)(r-6) = 0$$

$$\therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

である。したがって、求める円の方程式は

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 36$$

となる。

2

【解答】

(1)

ス
3

(2)

セ	ソ	タ
2	3	7

(3)

チ	ツ
1	5

(4)

テ	ト	ナ
2	5	17

(5)

ニ	ヌ	ネ
1	15	2

(6)

ノ	ハ	ヒ
2	15	6

(7)

フ	ヘ	ホ
7	51	51

【解説】

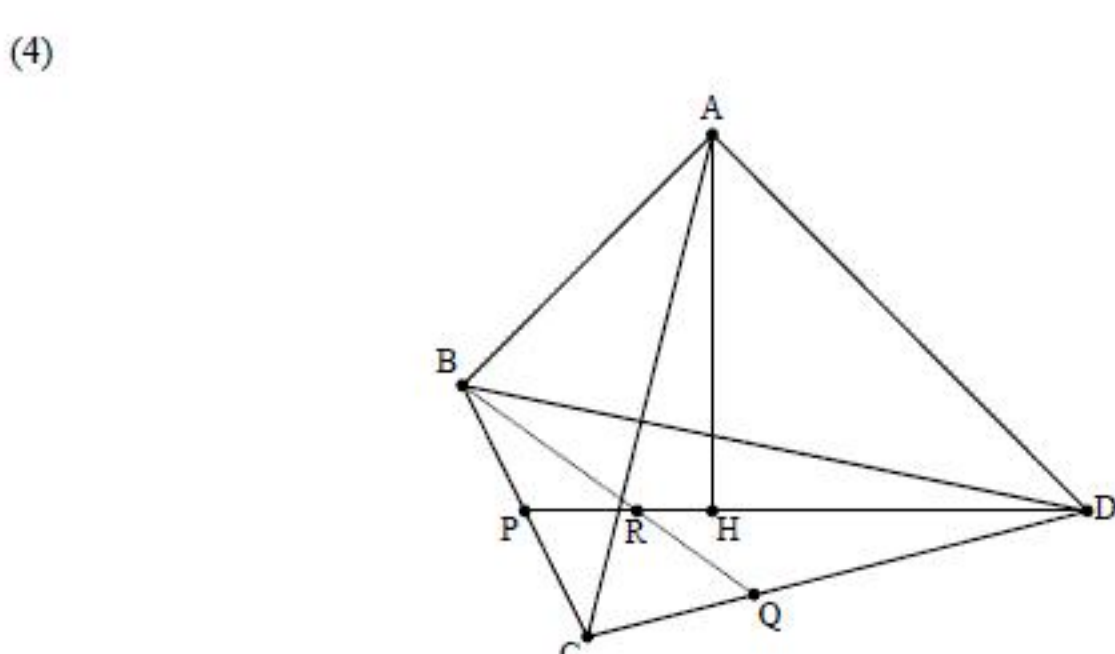
(1) $\triangle BCD$ は正三角形であり、点 P は辺 BC の中点であるから $\angle BPD = 90^\circ$ となる。したがって $PD = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$ である。

(2) $\triangle CBQ$ で余弦定理より
$$BQ^2 = 2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cos 60^\circ = \frac{28}{9}$$
 なので、 $BQ = \frac{2}{3}\sqrt{7}$ となる。

(3) $\triangle CPD$ と直線 BQ でメネラウスの定理より
$$\frac{CB}{BP} \cdot \frac{PR}{RD} \cdot \frac{DQ}{QC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{PR}{RD} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\therefore \frac{PR}{RD} = \frac{1}{4}$$
 となるので、 $PR = \frac{1}{5}PD$ である。



点 A から $\triangle BCD$ に垂線 AH をひくと、点 H は $\triangle BCD$ の重心となり、 $PH = \frac{1}{3}PD = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $HD = \frac{2}{3}PD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

である。三平方の定理より、 $AH^2 = AD^2 - HD^2 = 2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$, $AR^2 = AH^2 + RH^2 = \frac{8}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{68}{25}$ となる。ゆえに、 $AR = \frac{2\sqrt{17}}{5}$ となる。

(5) $\triangle CPR$ の面積は、 $\angle CPD = 90^\circ$ より $\frac{1}{2}CP \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ となる。点 A から平面 CPR に引いた垂線の長さは線分 AH の長さに等しいので、求める体積は、 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{1}{15}\sqrt{2}$ となる。

(6) 四面体 $ABCR$ の体積は
$$\frac{1}{2}BC \cdot PR \cdot AH \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{5}\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{15}$$

である。また点 R から $\triangle ABC$ に引いた垂線の長さを h 、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、四面体 $ABCR$ の体積は
$$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin 60^\circ \cdot h = \frac{h}{\sqrt{3}}$$
 とも表せる。したがって、
$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{15}$$

$$\therefore h = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$
 となる。

(7) $\triangle PAR$ において余弦定理より、
$$\cos \theta = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\sqrt{17}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{17}} = \frac{7}{51}\sqrt{51}$$
 となる。

3

【解答】

(1)

マ	ミ
5	12

(2)

ム	メ
1	4

(3)

モ	ヤ
1	3

(4)

ユ	ヨ
5	36

(5)

ラ	リ
7	36

(6)

ル	レ
1	9

【解説】

(1) $b > a$ となる確率を p とすると、 $a > b$ となる確率も p である。また $a = b$ となる確率は

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

である。したがって

$$p + p + \frac{1}{6} = 1$$

$$\therefore p = \frac{5}{12}$$

となる。

(2)

$$7 < a + b < 10 \text{ より} \\ 7 - a < b < 10 - a$$

となる。 $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の各値に対して、この不等式を満たす b の値はそれぞれ

$$0, 1, 2, 2, 2, 2 \text{ 個}$$

存在する。したがって求める確率は

$$\frac{0+1+2+2+2+2}{6^2} = \frac{1}{4}$$

となる。

(3)

$$a - 2b + 2 > 0 \text{ より}$$

$$b < \frac{1}{2}a + 1$$

となる。 $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の各値に対して、この不等式を満たす b の値はそれぞれ

$$1, 1, 2, 2, 3, 3 \text{ 個}$$

存在する。したがって求める確率は

$$\frac{1+1+2+2+3+3}{6^2} = \frac{1}{3}$$

となる。

(4)

$$a - 2b + 2 < 0 \text{ かつ } a + 3b - 13 \leq 0 \text{ より}$$

$$\frac{1}{2}a + 1 < b \leq -\frac{1}{3}a + \frac{13}{3}$$

となる。ここで、この不等式を満たす b が存在するためには

$$\frac{1}{2}a + 1 < -\frac{1}{3}a + \frac{13}{3}$$

$$\therefore a < 4$$

であることに注意する。

[1] $a = 1$ のとき

$$\frac{3}{2} < b \leq 4 \text{ より } b = 2, 3, 4 \text{ の } 3 \text{ 通りある。}$$

[2] $a = 2$ のとき

$$2 < b \leq \frac{11}{3} \text{ より } b = 3 \text{ の } 1 \text{ 通りある。}$$

[3] $a = 3$ のとき

$$\frac{5}{2} < b \leq \frac{10}{3} \text{ より } b = 3 \text{ の } 1 \text{ 通りある。}$$

以上[1]～[3]より、 (a, b) の組は $3+1+1=5$ (通り) 存在するので、求める確率は $\frac{5}{36}$ である。

(5)

$$1 < (a-5)^2 + (b-4)^2 < 5 \text{ より}$$

$$1 - (a-5)^2 < (b-4)^2 < 5 - (a-5)^2$$

である。ここで、この不等式を満たす b が存在するためには、

$$5 - (a-5)^2 > 0$$

$$\therefore a = 3, 4, 5, 6$$

である。

[1] $a = 3$ のとき

$$-3 < (b-4)^2 < 1 \text{ より } b = 4 \text{ の } 1 \text{ 通りある。}$$

[2] $a = 4$ のとき

$$0 < (b-4)^2 < 4 \text{ より } b = 3, 5 \text{ の } 2 \text{ 通りある。}$$

[3] $a = 5$ のとき

$$1 < (b-4)^2 < 5 \text{ より } b = 2, 6 \text{ の } 2 \text{ 通りある。}$$

[4] $a = 6$ のとき

$$0 < (b-4)^2 < 4 \text{ より } b = 3, 5 \text{ の } 2 \text{ 通りある。}$$

以上[1]～[4]より、 (a, b) の組は $1+2+2+2=7$ (通り) 存在するので、求める確率は $\frac{7}{36}$ であ

る。

(6)

条件より点 $P(a, b)$ と直線 $x - 2y + 2 = 0$ の距離が $\sqrt{5}$ となるので

$$\frac{|a - 2b + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |a - 2b + 2| = 5$$

$$\Leftrightarrow a = 2b + 3, 2b - 7$$

となる。

[1] $a = 2b + 3$ のとき

$$(a, b) = (5, 1) \text{ の } 1 \text{ 通りある。}$$

[2] $a = 2b - 7$ のとき

$$(a, b) = (1, 4), (3, 5), (5, 6) \text{ の } 3 \text{ 通りある。}$$

以上[1], [2]より、求める確率は $\frac{4}{6^2} = \frac{1}{9}$ となる。