

1

【解答】

- (1) ア 5 イ 5 ウ 1 エ 1 オ 7
 (2) カ -1 キ 1 ク 4 ケ 0
 (3) コ 7 サ 2

【解説】

- (1)
 (i)

$$q^2 - p^2q + 4p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^2}{p^2} = q - 4$$

ここで、 $p \neq q$ とすると、 p, q は互いに素となるので、 $\frac{q^2}{p^2}$ は整数となることはない。
 よって、

$$p = q$$

であり、計算すると、

$$p = q = 5$$

と求まる。

- (ii)
 与式は、

$$4x^4 + 4y^4 - x^2y^2 = p$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 2y^2)^2 - 9x^2y^2 = p$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 2y^2 + 3xy)(2x^2 + 2y^2 - 3xy) = p$$

と変形できる。ここで、 x, y はともに正の整数であるから、 $2x^2 + 2y^2 + 3xy, 2x^2 + 2y^2 - 3xy$ ともに整数であり、

$$2x^2 + 2y^2 + 3xy > 2x^2 + 2y^2 - 3xy$$

であるので、

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 3xy = p \\ 2x^2 + 2y^2 - 3xy = 1 \end{cases}$$

となる。

後者の式を変形すると、

$$4x^2 + 4y^2 - 6xy = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3(x - y)^2 = 2$$

$$x = 1, y = 1$$

しかありえない。このとき、

$$2x^2 + 2y^2 + 3xy = 7$$

となり、たしかに素数となる。よって、

$$x = y = 1, p = 7$$

である。

- (2)
 $\alpha = A, \frac{1}{\beta} = B$ とする。

$$f(1) = 4 \Leftrightarrow A + B = 3$$

$$f(2) = 18 \Leftrightarrow A^2 + B^2 = 17$$

であるから、

$$AB = \frac{(A+B)^2 - (A^2 + B^2)}{2} = -4$$

となる。ここで、解と係数の関係より、 A, B は

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

の2解である。これを解くと、 $\alpha \leq \beta$ より、

$$A = -1, B = 4$$

となる。よって、

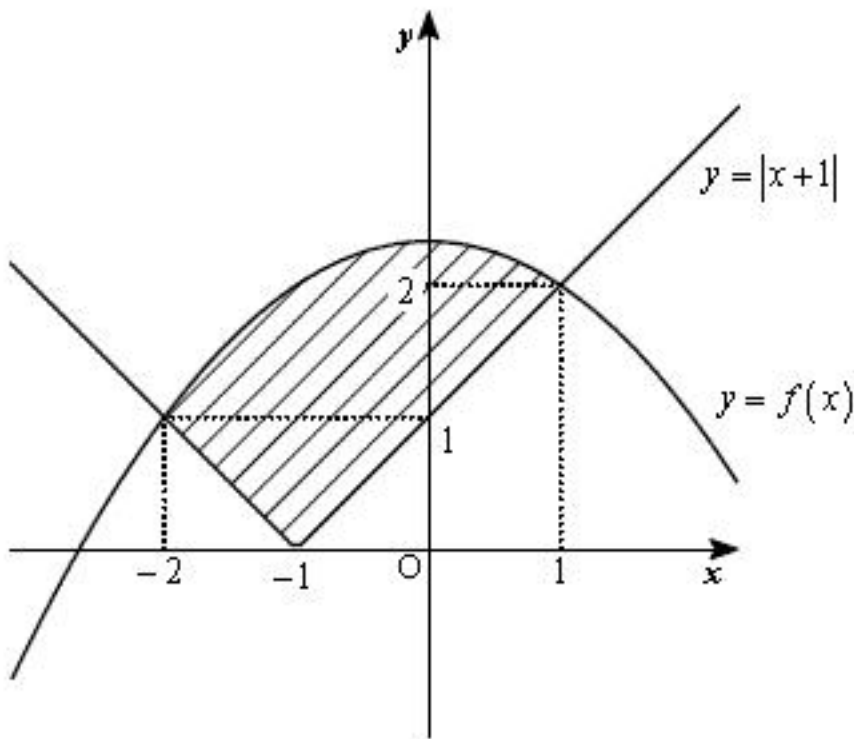
$$\alpha = -1, \beta = \frac{1}{4}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} & f(n+3) - 4f(n+2) - f(n+1) + 4f(n) \\ &= (-1)^{n+3} - 4(-1)^{n+2} - (-1)^{n+1} + 4(-1)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

- (3)
 領域を図示すると、以下のようになる。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3} \right) dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \\ &= \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{3}x \right]_{-2}^1 - \frac{5}{2} \\ &= -1 + 7 - \frac{5}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

である。

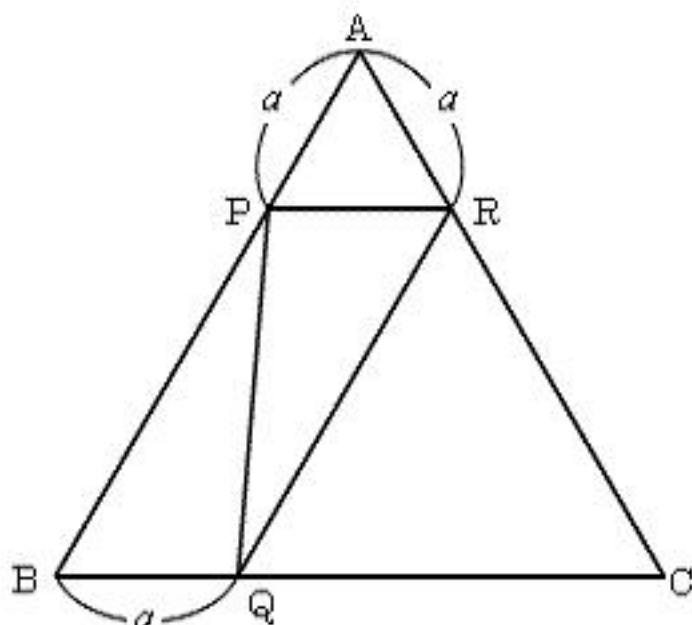
2

【解答】

- (1) シ 1 ス 3 セ -3 ソ 1
 (2) タ 4 チ -2 ツ 1
 (3) テ 3 ト -3 ナ 3 ニ -1 ネ 2
 ネ 1 ノ -1 ハ 1 ヒ -1 フ -2

【解説】

(1)



条件より、

$$AP = AR = BQ = a$$

である。△APR と △RQC は正三角形なので、

$$PR = a, QR = 1 - a$$

である。ここで、BP = 1 - a であり、△BPQ において余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= a^2 + (1-a)^2 - 2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot \cos 60^\circ \\ &= 3a^2 - 3a + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore PQ = \sqrt{3a^2 - 3a + 1}$$

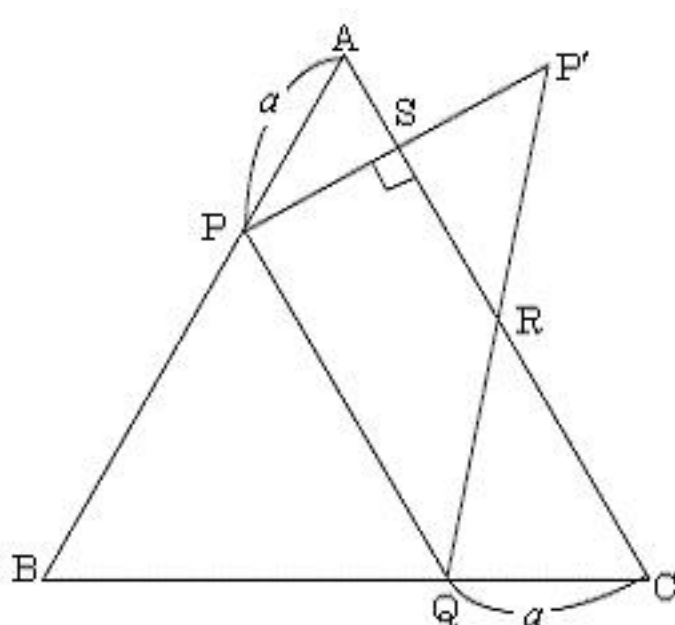
となる。よって、

$$\begin{aligned} \ell &= PQ + QR + RP \\ &= \sqrt{3a^2 - 3a + 1} + (1-a) + a \\ &= 1 + \sqrt{3a^2 - 3a + 1} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

図のように、CA に関して、P の対称点 P' をとる。



すると、P'Q と CA の交点を R としたとき、m は最小となり、m = P'Q となる。

ここで、PS = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ より、

$$PP' = \sqrt{3}a$$

であり、

$$\angle P'PQ = 90^\circ$$

である。また、△BPQ ∽ △BAC より、

$$BP : BA = PQ : AC$$

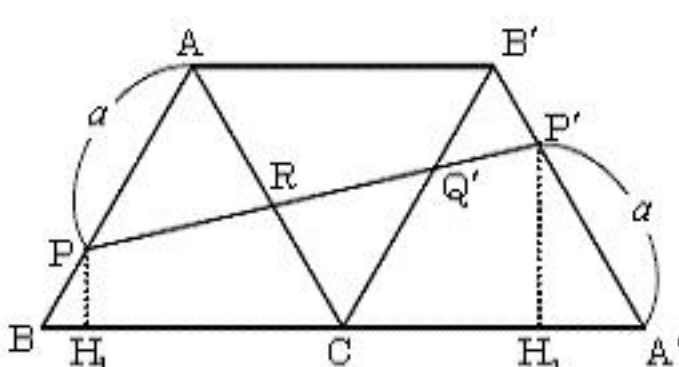
$$\therefore PQ = 1 - a$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} P'Q &= \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (1-a)^2} \\ &= \sqrt{4a^2 - 2a + 1} \end{aligned}$$

と求まる。

(3)



辺 AC に関する B, Q の対称点をそれぞれ B', Q' とし、辺 B'C に関する A の対称点を A' とする。また、辺 AB' 上に AP' = a となるように P' をとる。このとき、PP' の長さが 3 辺の長さの和の最小値に等しい。ここで、点 P, P' からそれぞれ BA' に垂線をおろして、その足を H₁, H₂ とすると、

$$BH_1 = (1-a) \cos 60^\circ = \frac{1}{2}(1-a)$$

$$PH_1 = (1-a) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a)$$

$$AH_2 = a \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$$

$$PH_2 = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

であるから、

$$\begin{aligned} n &= PP' \\ &= \sqrt{(AA' - BH_1 - AH_2)^2 + |PH_1 - PH_2|^2} \\ &= \sqrt{\left\{2 - \frac{1}{2}(1-a) - \frac{1}{2}a\right\}^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}(1-a) - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right|^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(1-2a)^2} \\ &= \sqrt{3a^2 - 3a + 3} \end{aligned}$$

と求まる。AB ∥ B'C, AC ∥ B'A' より、

$$\triangle APR \sim \triangle CQ'R, \triangle CQ'R \sim \triangle B'Q'P'$$

であるから、

$$a : CQ' = AR : 1 - AR$$

$$\Leftrightarrow a(1 - AR) = AR \cdot CQ' \quad \dots \textcircled{1}$$

$$1 - a : 1 - AR = 1 - CQ' : CQ'$$

$$\Leftrightarrow (1 - AR)(1 - CQ') = (1 - a)CQ' \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①の両辺はともに正であるから、②を①で割って、

$$\frac{1 - CQ'}{a} = \frac{1 - a}{AR}$$

$$\Leftrightarrow AR(1 - CQ') = a(1 - a) \quad (\because a > 0, AR > 0) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。①を③に代入して、

$$AR - a(1 - AR) = a(1 - a)$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)AR = -a^2 + 2a$$

$$\therefore AR = \frac{-a^2 + 2a}{a + 1}$$

と求まる。これを③に代入して、

$$\frac{-a^2 + 2a}{a + 1}(1 - CQ') = a(1 - a)$$

$$\Leftrightarrow 1 - CQ' = \frac{a(1 - a^2)}{-a^2 + 2a}$$

$$\therefore CQ' = 1 - \frac{a(1 - a^2)}{-a^2 + 2a}$$

$$= \frac{-a^2 + 2a - a + a^3}{-a^2 + 2a}$$

$$= \frac{a^3 - a^2 + a}{-a^2 + 2a}$$

$$= \frac{-a^2 + a - 1}{a - 2}$$

と求まる。

【解答】

$$(1) \quad \text{へ } 1 \quad \text{ホ } 81 \quad \text{マ } 5 \quad \text{ミ } 162$$

$$(2) \quad (i) \quad \text{ム } 27 \quad \text{メ } 12 \quad \text{モ } 3$$

$$(ii) \quad \text{ヤ } 11 \quad \text{ユ } 54$$

【解説】

(1)

 $ab = -1$ を満たす (a, b) の組は

$$(a, b) = (1, -1), (-1, 1)$$

の2つであるから、求める確率は、

$$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{81}$$

である。

また、 $ab = 10$ を満たす (a, b) の組は

$$(a, b) = (2, 5), (5, 2), (-2, -5), (-5, -2)$$

であるから、求める確率は、

$$2 \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{162}$$

である。

(2)

(i)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + (a-b)x + b-a = 0$$

であるから、 $x^2 + (a-b)x + b-a = 0$ の判別式を D とすると、 C と l が共有点を持たない条件は、 $D < 0$ である。すなわち、

$$D = (a-b)^2 - 4(b-a) < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b+4) < 0$$

$$\Leftrightarrow -4 < a-b < 0$$

$$\Leftrightarrow b-4 < a < b$$

である。ここで、 a, b はともに整数であるから、

$$b-3 \leq a \leq b-1 \quad \cdots (*)$$

である。ここで、 b の値で場合分けをして、 (a, b) の組を考える。[1] $b = -6$ のとき $-9 \leq a \leq -7$ であるから、 $(*)$ を満たす (a, b) の組は存在しない。[2] $b = -5$ のとき $-8 \leq a \leq -6$ であるから、 $(*)$ を満たす (a, b) の組は1組である。[3] $b = -4$ のとき $-7 \leq a \leq -5$ であるから、 $(*)$ を満たす (a, b) の組は2組である。[4] $b = -3, -2, -1, 4, 5, 6$ のとき $b-3 \leq a \leq b-1$ を満たす a は全てとり得るので、 $(*)$ を満たす (a, b) の組は3組である。[5] $b = 1, 2, 3$ のとき

$b-3 \leq a \leq b-1$ を満たす整数 a に0が含まれるので、 $(*)$ を満たす (a, b) の組は2組である。

以上[1]～[5]より C と l が共有点を持たない (a, b) の組の総数は27組である。このうち、 a, b の符号がともに正になるのは、 $b = 4, 5, 6$ のときの計9組と $(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ の3組であるから、12組である。また、 a, b が異符号になるのは、 $(a, b) = (-2, 1), (-1, 1), (-1, 2)$ の3組である。

(ii)

 a, b の符号がともに負になるのは、(i)より

$$27 - 12 - 3 = 12$$

である。よって求める確率は、

$$\begin{aligned} & 12 \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + 12 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{11}{54} \end{aligned}$$

である。