

1

【解答】

- (1) ア 1 イ 2 ウ 5 エ 2 オ -5 カ 6
 (2) キ 52 ク 84 ケ 2 コ 3 サ 4
 シ 11 ス 6

【解説】

(1)

$\sin x = t$ とすると、 $0 \leq x < 2\pi$ より

$$-1 \leq t \leq 1$$

である。このとき、

$$\begin{aligned}\sin 3x &= -4\sin^3 x + 3\sin x \\ \cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos^4 x + \sin 3x - \sin^4 x + 2\sin x \\ &= (1 - 2\sin^2 x) + (3\sin x - 4\sin^3 x) + 2\sin x \\ &= -4\sin^3 x - 2\sin^2 x + 5\sin x + 1 \\ &= -4t^3 - 2t^2 + 5t + 1\end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$g(t) = -4t^3 - 2t^2 + 5t + 1$$

とおくと、 $-1 \leq t \leq 1$ における $g(t)$ の最大値とそのときの t の値、最小となるときの t の値を求めればよい。

$$\begin{aligned}g'(t) &= -12t^2 - 4t + 5 \\ &= -(12t^2 + 4t - 5) \\ &= -(2t - 1)(6t + 5)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}g(-1) &= -4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 1 \\ &= -2 \\ g\left(-\frac{5}{6}\right) &= -4 \cdot \left(-\frac{125}{216}\right) - 2 \cdot \left(\frac{25}{36}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{108}(250 - 150 - 450 + 108) \\ &= -\frac{242}{108} \\ &= -\frac{121}{54} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) &= -4 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 1 \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 1 \\ &= \frac{5}{2} \\ g(1) &= -4 - 2 + 5 + 1 = 0\end{aligned}$$

であるから、 $g(t)$ の増減表は下記のとおりである。

t	-1	...	$-\frac{5}{6}$	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	-2	$\searrow$	$-\frac{121}{54}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	0

したがって、 $g(t)$ は

$$\begin{aligned}t = \frac{1}{2} \text{ のとき、最大値 } &\frac{5}{2} \\ t = -\frac{5}{6} \text{ のとき、最小値 } &-\frac{121}{54}\end{aligned}$$

をとる。したがって、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}\sin x = \frac{1}{2} \text{ のとき、最大値 } &\frac{5}{2} \\ \sin x = -\frac{5}{6} \text{ のとき、最小値 } &-\frac{121}{54}\end{aligned}$$

をとる。

(2)

$$S_{3,6} = a_3 + a_4 + \cdots + a_8$$

を $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ を用いて整理すると、

$$S_{3,6} = 32a_2 + 20a_1$$

である。 $a_1 = a_2 = 1$ より、

$$S_{3,6} = 52$$

である。同様にして、

$$S_{4,6} = a_4 + a_5 + \cdots + a_9 = 52a_2 + 32a_1 = 84$$

である。また、

$$\begin{aligned}S_{n,6} &= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+5} \\ &= 2a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5} \\ &= a_{n+2} + 2a_{n+4} + a_{n+5} \\ &= a_{n+2} + a_{n+3} + 3a_{n+4} \\ &= 4a_{n+4}\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}S_{n,10} &= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+9} \\ &= 4a_{n+4} + a_{n+6} + 2a_{n+7} + 2a_{n+8} \\ &= 4a_{n+4} + 3a_{n+6} + 4a_{n+7} \\ &= 4a_{n+4} + 4a_{n+5} + 7a_{n+6} \\ &= 11a_{n+6}\end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1) セ -2

(2) ソ 2 タ -1 チ 2 ツ -1 テ 3 ト 3 ナ 2 ニ 8
ヌ 3

【解説】

(1)

y を消去すると

$$\begin{aligned}x^2 &= -(x-a)^2 + b \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - b &= 0\end{aligned}$$

となる。判別式を考えて、

$$\begin{aligned}4a^2 - 8(a^2 - b) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -4a^2 + 8b &\geq 0 \\ \therefore a^2 - 2b &\leq 0\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$ の解が p, q である。解と係数の関係より、

$$pq = \frac{a^2 - b}{2}$$

となる。

また、直線 ℓ は、

$$\begin{aligned}y &= 2p(x-p) + p^2 \\ &= 2px - p^2\end{aligned}$$

とかける。

同様にして、直線 m の傾きは $2q$ であるので、直交するということは、

$$2p \cdot 2q = -1 \Leftrightarrow 2a^2 - 2b = -1$$

となる。 $b = \frac{7}{2}$ を代入して

$$a = \sqrt{3}$$

である。これを、解と係数の関係の式に代入すると、

$$\begin{cases} p+q = a = \sqrt{3} \\ pq = \frac{a^2 - b}{2} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

であり、これを解くと、 $q < p$ より

$$p = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}, q = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$$

である。したがって、

$$p - q = 2$$

であるから、このとき、囲まれた面積は

$$\begin{aligned}& \int_q^p \{ -(x-a)^2 + b - x^2 \} dx \\ &= \int_q^p (-2x^2 + 2ax - a^2 + b) dx \\ &= -2 \int_q^p (x-p)(x-q) dx \\ &= \frac{1}{3} (p-q)^3 \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

となる。

3

- (1) ネ 4 ノ 13
 (2) ハ 22
 (3) ヒ 65 フ 7 ヘ 81 ホ 8

【解説】

(1)

点Pが (m, n) から $(m+1, n+1)$ に進むことを $\uparrow$, $(m+1, n-1)$ に進むことを $\downarrow$ と表す。また点Pが $(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 0) \rightarrow \dots$ のように移動していくのを $\uparrow\downarrow\dots$ のように表すとする。このとき点Pが点 $(6, 4)$ に到達する経路は、5つの $\uparrow$ と1つの $\downarrow$ の並べ替えに1対1に対応する。最後の2回は点 $(4, 2)$ から $\uparrow\uparrow$ であることに注意すると点Pが点 $(6, 4)$ に到達する経路は、残りの $\uparrow\uparrow\downarrow$ の並べ方を考えて、

$${}_4C_1 = 4 \text{ 通り}$$

である。同様に点Pが点 $(8, 4)$ に到達する経路は6つ $\uparrow$ と2つの $\downarrow$ の並べ替えに1対1に対応する。最後の2回は点 $(6, 2)$ から $\uparrow\uparrow$ であることに注意すると点Pが点 $(8, 4)$ に到達する経路は残りの $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$ の並べ方を考えて、

$${}_6C_2 = 15$$

である。しかし、 $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$, $\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow$ の場合、点 $(8, 4)$ より先に壁L, Uに到達してしまうのでこの2通りを除く。したがって、答えは、

$$15 - 2 = 13 \text{ 通り}$$

である。

(2)

点Pの x 座標が奇数の整数のとき、壁Lに到達することはない。点Pが到達する点によって場合分けをして考える。

[1] 点Pが $(2, -2)$ に到達するとき、

点Pが点 $(2, -2)$ に到達する経路は1通りである。

[2] 点Pが $(4, -2)$ に到達するとき、

(1)と同様に考えると最後の2回は点 $(2, 0)$ から $\downarrow\downarrow$ であるから、点Pが点 $(4, -2)$ に到達する経路は、残りの $\uparrow\downarrow$ の並べ方を考えて、

$${}_2C_1 = 2 \text{ 通り}$$

である。

[3] 点Pが $(6, -2)$ に到達するとき、

点Pが点 $(6, -2)$ に到達する経路は、最後の2回は点 $(4, 0)$ から $\downarrow\downarrow$ であるから、残りの $\uparrow\uparrow\downarrow$ の並べ方を考えて、

$${}_4C_2 = 6$$

である。しかし、 $\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow$ のときは、到達する前に壁にあたってしまうため除かなければならない。したがって、5通りである。

[4] 点Pが $(8, -2)$ に到達するとき、

最点Pが点 $(8, -2)$ に到達する経路は、最後の2回は点 $(6, 0)$ から $\downarrow\downarrow$ であるから、残りの $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ の並べ方を考えて、

$${}_6C_3 = 20$$

である。しかし、始めの2回が $\downarrow\downarrow$ のとき、または始めの4回が $\uparrow\downarrow\downarrow$, $\downarrow\uparrow\downarrow$ のときをのぞかなければならない。すなわち、

$$20 - 1 \cdot {}_4C_1 - 2 \cdot {}_2C_2 = 20 - 4 - 2 \\ = 14 \text{ 通り}$$

である。

[1], [2], [3], [4]より、壁Lに到達する場合の数は

$$1 + 2 + 5 + 14 = 22 \text{ 通り}$$

である。

(3)

$\uparrow$ と $\downarrow$ を m 個並べた経路に対応する進み方をする確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ である。したがって(2)より壁Lに到達する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 14\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{65}{128} = \frac{65}{2^7}$$

となる。同様に壁Uに到達する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 13\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{45}{2^8}$$

となる。したがって点Pは壁L, 壁U, 壁Sのいずれかに到達するので、余事象を考えて、壁Sに到達する確率は

$$1 - \frac{65}{2^7} - \frac{45}{2^8} = \frac{81}{2^8}$$

となる。