

1

【解答】

- (1) ア 5 イ 2
 (2) ウ 2 エ 1 オ 0 カ -1
 (3) キ 16 ク 12 ケ -1

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \log_3 384 + \log_9 108 - \log_{\sqrt{3}} 6 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \log_3 (2^7 \times 3) \right\} + \frac{\log_3 (3^3 \times 2^2)}{\log_3 9} - \frac{\log_3 (3 \times 2)}{\log_3 \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} (7 \log_3 2 + 1) + \frac{1}{2} (3 + 2 \log_3 2) - 2(1 + \log_3 2) \\ &= \frac{5}{2} \log_3 2 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{4}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{4 \{ (1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3} \}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3} \\ &= \frac{4(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \\ &= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{6} \end{aligned}$$

である。

(3)

(i)

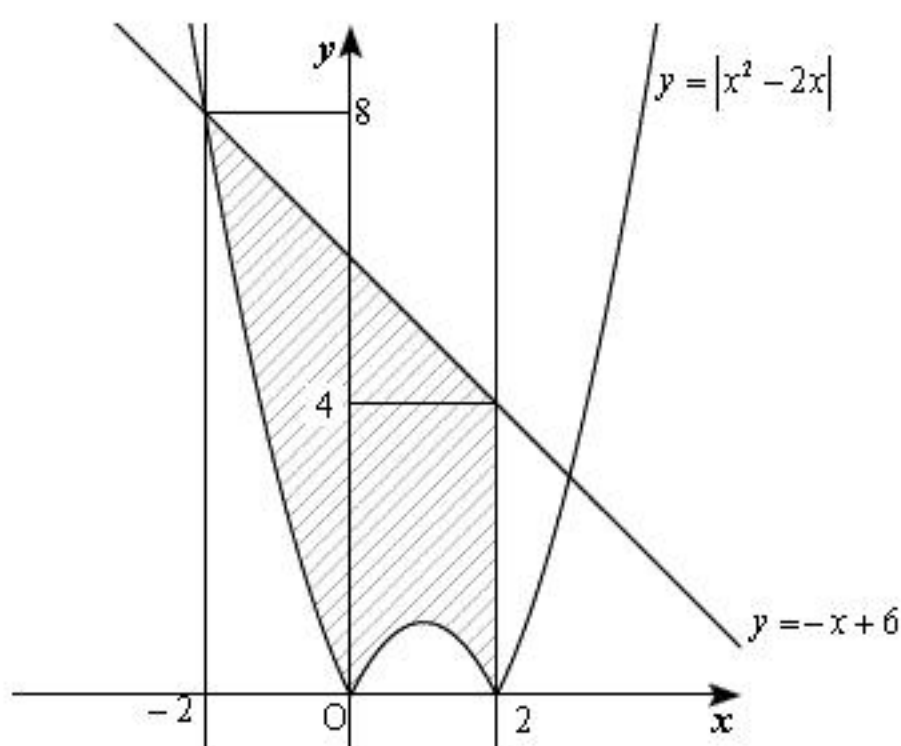
まず,

$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & (x < 0, x > 2 \text{ のとき}) \\ -x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。また,

$$\begin{aligned} |x| &\leq 2 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

であるから、領域 D を図示すると下図の斜線部になる。(境界は含む)



よって、 D の面積は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 4 - \int_{-2}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= 24 - \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_0^2 \\ &= 24 - \frac{20}{3} + \frac{8}{3} - 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

となる。

(ii)

実数 k を用いて,

$$4x + y = k$$

とおくと,

$$y = -4x + k \quad \dots \textcircled{1}$$

で変形できる。よって、 $\textcircled{1}$ 式と D が共有点を持つときの切片の最大値と最小値を考えればよい。

まず、最大値について考える。 $\textcircled{1}$ 式は $y = -x + 6$ より傾きが急であるので、(i) のグラフも考えると、 $\textcircled{1}$ が点 $(2, 4)$ を通るとき k が最大値をとる。よって、その値は,

$$\begin{aligned} k &= 4x + y \\ &= 4 \cdot 2 + 4 \end{aligned}$$

と求まる。

次に、最小値について考える。(i) の図より、 $\textcircled{1}$ の切片 k が最小となるには、 $y = x^2 - 2x$ の $-2 \leq x \leq 0$ の部分で $\textcircled{1}$ が接するときである。 $y' = 2x - 2$ より,

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= -4 \\ \therefore x &= -1 \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は点 $(-1, 3)$ で D と接する。このときの接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= -4(x + 1) + 3 \\ &= -4x - 1 \end{aligned}$$

であるから、 k の最小値は,

$$-1$$

である。

2

【解答】

- (1) コ 3 サ 5
 (2) シ 3 ス 2
 (3) セ -2 ソ 1 タ 2 チ 1 ツ 3
 テ 4 ト 3 ナ 0 ニ -1 ネ 3
 (4) ネ 1 ノ 4

【解説】

(1)

$$\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。したがって、

$$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}| |\overrightarrow{c}|} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

となる。よって $0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$ であるので、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。

(2)

△ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{b}| |\overrightarrow{c}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$Q(x, y, z)$ とする。このとき、

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-\frac{1}{3} \\ z+\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

である。したがって $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{c}$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow x-1+2\left(z+\frac{1}{6}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2z+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow y-\frac{1}{3}-2\left(z+\frac{1}{6}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 2z+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって $z=t-\frac{1}{6}$ と置くと

$$Q\left(-2t+1, 2t+\frac{1}{3}, t-\frac{1}{6}\right)$$

となる。以上より、ある実数 s が存在して、

$$H\left(-2s+1, 2s+\frac{1}{3}, s-\frac{1}{6}\right)$$

とおける。このとき、

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} -2s-1 \\ 2s+\frac{1}{3} \\ s-\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

である。また点Hが平面ABCにあることよりある実数 u, v が存在して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= u\overrightarrow{b} + v\overrightarrow{c} \\ &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u-2v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。よって成分を比較すると

$$\begin{cases} -2s-1=u \\ 2s+\frac{1}{3}=v \\ s-\frac{7}{6}=2u-2v \end{cases}$$

となる。これを解くと

$$s=-\frac{1}{6}, u=-\frac{2}{3}, v=0$$

となる。したがって

$$H\left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$$

となる。

(4)

点Hは点Pから平面ABCに下ろした垂線の足である。ここで

$$\overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PH}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。したがって、(2)より、求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

3

- (1) ハ 5 ヒ 16
 (2) フ 2 ヘ -2
 (3) ホ 3 マ -4 ミ 1
 (4) ム 9 メ 4 モ -2 ヤ 0
 (5) ユ 3 ヨ 2 ラ 0 リ -1

【解説】

$$3x+2y+z=6k-1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1)

$k=2$ のとき①は

$$2y+z=11-3x$$

となる。ここで y, z は正の整数であるので

$$11-3x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} \geq x$$

となる。したがって x が正の整数であることより

$$x=1, 2$$

である。

[1] $x=1$ のとき

このとき

$$z=2(4-y)$$

であるから z が正の整数となるような y は

$$y=1, 2, 3$$

の3通りである。

[2] $x=2$ のとき

このとき

$$z=5-2y$$

であるから z が正の整数となるような y は

$$y=1, 2$$

の2通りである。

以上[1], [2]より, $k=2$ のとき①を満たす整数組 (x, y, z) は

$$3+2=5 \text{ [組]}$$

ある。

同様に, $k=3$ のとき, ①は

$$2y+z=17-3x$$

となる。ここで y, z は正の整数であるので,

$$17-3x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{3} \geq x$$

となる。したがって, x が正の整数であることより,

$$x=1, 2, 3, 4$$

となる。

[1] $x=1$ のとき

このとき

$$z=2(7-y)$$

であるから z が正の整数となるような y は

$$y=1, 2, \dots, 6$$

の6通りである。

[2] $x=2$ のとき

このとき

$$z=11-2y$$

であるから z が正の整数となるような y は

$$y=1, 2, \dots, 5$$

の5通りである。

[3] $x=3$ のとき

このとき

$$z=2(4-y)$$

であるから z が正の整数となるような y は

$$y=1, 2, 3$$

の3通りである。

[4] $x=4$ のとき

このとき

$$z=5-2y$$

であるから z が正の整数となるような y は

$$y=1, 2$$

の2通りである。

以上[1], [2]より $k=2$ のとき①を満たす整数組 (x, y, z) は

$$6+5+3+2=16 \text{ [組]}$$

ある。

(2)

①より

$$2y+z=6k-3x-1$$

である。 y, z は正の整数であるので

$$6k-3x-1 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow 2k-\frac{4}{3} \geq x$$

である。 x は正の整数であるので

$$x=1, 2, \dots, 2k-2$$

の $2k-2$ 通りの値をとり得る。

(3)

$x=\ell$ ($\ell=1, 2, \dots, 2k-1$) とする。このとき

$$z=6k-3x-1-2y$$

であり, z は正の整数であるから

$$6k-3x-1-2y \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 3k-1-\frac{3}{2}\ell \geq y$$

となる。したがって ℓ が偶数のとき y は

$$y=1, 2, \dots, 3k-1-\frac{3}{2}\ell$$

の $3k-1-\frac{3}{2}\ell$ 通りの値をとり得る。また ℓ 奇数のとき y は

$$y=1, 2, \dots, 3k-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ell$$

の $3k-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ell$ 通りの値をとり得る。 $\ell=1, 2, \dots, 2k-2$ より奇数である ℓ は $k-1$ 個, 偶数である ℓ も $k-1$ 個ある。したがって①を満たす整数組 (x, y, z) の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{2k-2} \left(3k-1-\frac{3}{2}\ell \right) - \frac{1}{2} \cdot (k-1) &= (3k-1)(2k-2) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} (2k-2)(2k-1) - \frac{1}{2} (k-1) \\ &= (6k^2-8k+2) - \frac{3}{2} (2k^2-3k+1) - \frac{1}{2} (k-1) \\ &= 3k^2-4k+1 \end{aligned}$$

となる。

(4)

(3)の最後の和をとる部分で, $\ell=1, 2, \dots, k$ とすればよい。 k が偶数であることより奇数である

ℓ は $\frac{k}{2}$ 個, 偶数である ℓ は $\frac{k}{2}$ 個ある。したがって①を満たす整数組 (x, y, z) のうち $x \leq k$ を

みたすものの個数は

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^k \left(3k-1-\frac{3}{2}\ell \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2} &= k(3k-1) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot k(k+1) - \frac{k}{4} \\ &= \frac{9}{4}k^2-2k \end{aligned}$$

となる。

(5)

$z=6k-3x-1-2y$ であるので

$$z \leq 3k$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k-3\ell-1}{2} \leq y$$

となる。したがって ℓ が奇数のときは

$$y=\frac{3k-3\ell-1}{2}, \dots, 3k-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ell$$

の

$$\left(3k-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ell \right) - \left(\frac{3k-3\ell-1}{2} \right) + 1 = \frac{3}{2}k \text{ 個}$$

の値をとり得る。同様に ℓ が偶数のときは

$$y=\frac{3k-3\ell}{2}, \dots, 3k-1-\frac{3}{2}\ell$$

の

$$\left(3k-1-\frac{3}{2}\ell \right) - \left(\frac{3k-3\ell}{2} \right) + 1 = \frac{3}{2}k \text{ 個}$$

の値をとり得る。ただし, $k=\ell$ のとき,

$$\frac{3k-3\ell}{2} = 0$$

となるので, それに注意すると, ①を満たす整数組 (x, y, z) のうち $x \leq k, z \leq 3k$ 満たすもの

の個数は

$$\sum_{\ell=1}^k \frac{3}{2}k-1 = \frac{3}{2}k^2-1 \text{ [個]}$$

となる。