

1

(1) あ e い g う h ア 1 イ 2 ウ 3

(2) エ 512 オ 288 カ 120

【解説】

(1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

であるので行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換は直線 $y=x$ に関する対称移動である。また

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

であるのでこの行列の表す 1 次変換は原点まわりの 30° の回転移動である。ここで

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

であるので、行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換は原点まわりの 30° の回転移動と直線 $y=x$

に関する対称移動を順に施したもの、すなわち直線 $y=(\tan 30^\circ)x=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称移動

である。 $OP(x, y), OQ(X, Y)$ とおく。点 Q は点 P を (c), (h) の 1 次変換で移した点であるので

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$OQ = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} \\ = \sqrt{x^2 + y^2} \\ = OP$$

となる。よって OQ の長さは OP の長さの 1 倍である。よって点 Q が直線 OP 上にあることとあわせると

$$\overrightarrow{OP} = \pm \overrightarrow{OQ}$$

である。

[1] $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ のとき

このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$y = (2 - \sqrt{3})x$$

となる。

[2] $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OQ}$ のとき

このとき

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$y = (-2 - \sqrt{3})x$$

となる。

以上[1], [2]より点 P は直線

$$y = (\pm 2 - \sqrt{3})x$$

のいずれかの上にある。

(2)

(i)

各色のチューリップの植え方は 8 通りあるので、全体の植え方は

$$8^3 = 512 \text{ 通り}$$

である。

(ii)

黄色いチューリップの植え方は 8 通りである。赤いチューリップの植え方は、同じ場所に 2 本を植える場合と別の場所に 2 本を植える場合を考えると

$${}_8C_2 + 8 = 36 \text{ 通り}$$

である。したがって全体の植え方は

$$8 \times 36 = 288 \text{ 通り}$$

である。

(iii)

同じ場所に 3 本植える場合、同じ場所に 2 本別の場所に 1 本植える場合、3 本とも別のところに植える場合に分けて考えると全体の植え方は

$$8 + 8 \cdot 7 + {}_8C_3 = 120 \text{ 通り}$$

となる。

- (1) キ 4 ク 3 ケ 15 コ 3 サ 2 シ 6
 (2) ス 4 セ 6 ソ 5 タ 2 チ 2 ツ 3
 テ 6 ト 9 ナ 6 ニ 2

〔解説〕

(1)

△OABにおいて三平方の定理より

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{OA^2 - AB^2} \\ &= \sqrt{64 - 16} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。またこのとき△OABは3辺の比が $1:\sqrt{3}:2$ の3角形であるので

$$\angle AOB = 30^\circ$$

である。また線分OAとx軸の正の向きがなす角は 45° である。したがってOBとx軸の正の向きがなす角は $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ である。よってBのx座標は $4\sqrt{3} \cos 15^\circ$ である。ここで、

$$\begin{aligned} \cos^2 15^\circ &= \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} \\ \Leftrightarrow \cos^2 15^\circ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow \cos 15^\circ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

であるから

$$4\sqrt{3} \cos 15^\circ = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

である。

(2)

$t=0$ で直線ABとx軸の正の向きがなす角度は

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = -\frac{5}{12}\pi$$

である。毎秒 $\frac{\pi}{6}$ の割合で円Rに巻きつくので、 t 秒後の時点で、

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = 4(\cos \theta, \sin \theta) \\ \theta = -\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{6}t \\ \quad = \frac{\pi}{6}\left(t - \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

である。また線分CPの長さは 4π から弧BCの長さを引いたものである。したがって

$$\begin{aligned} CP &= 4\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{6}t \\ &= \frac{2\pi}{3}(6-t) \end{aligned}$$

となる。つまり、 t 秒後の瞬間、点Pは半径 $\frac{2\pi}{3}(6-t)$ の円の周りを毎秒 $\frac{\pi}{6}$ で回転するので、

点Pの速さは

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{2\pi}{3}(6-t) = \frac{\pi^2}{9}(6-t)$$

である。よって $a=2$ である。

3

- (1) ヌ 1 ネ 2
 (2) え c ノ -5 ハ -6 ヒ 3
 (3) お d フ -5
 (4) か c ヘ 2
 (5) き d ホ 2 く c マ -5 ミ 6 ム 3

- (1) $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であることより $f(x)$ は $x=2$ で連続である。 $x=2$ で連続である条件から

$$f(2)=5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \frac{3}{2-t} + s$$

であるので

$$\frac{3}{2-t} + s = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また $h>0$ に対して

$$\begin{aligned} f(2+h)-f(2) &= \frac{3}{2-t+h} + s - 5 \\ &= \frac{3}{2-t+h} - \frac{3}{2-t} \\ &= \frac{-3h}{(2-t+h)(2-t)} \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{-3}{(2-t+h)(2-t)} \\ &= \frac{-3}{(t-2)^2} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= -3 \end{aligned}$$

である。したがって $f(x)$ が $x=2$ で微分可能であることより

$$\begin{aligned} \frac{-3}{(t-2)^2} &= -3 \\ \therefore t &= 1, 3 \end{aligned}$$

となる。ここで $f(x) = \frac{3}{x-t} + s$ が $x>2$ で定義されていることより $t=3$ は不適である。したがって

$$t=1$$

であり、このとき①より

$$s=2$$

となる。

- (2) (1)の結果より

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9x - 5 & (x \leq 2 \text{ のとき}) \\ \frac{3}{x-1} + 2 & (x > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。したがって

$$f'(x) = \begin{cases} -3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) & (x \leq 2 \text{ のとき}) \\ -\frac{3}{(x-1)^2} & (x > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。これより $f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

ここで

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$f(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} - 5$$

であるので $f(x)$ の最小値は $-6\sqrt{3} - 5$ である。したがって A が空集合であるための条件は

$$a \leq -6\sqrt{3} - 5$$

である。

- (3) $f(x)$ が $x=0$ 付近で単調増加するので、 $B \subset A$ となるような正の実数 b が存在するための条件は $x>0, x \in A$ となる x が存在することである。したがって求める条件は

$$\begin{aligned} a &> f(0) \\ \therefore a &> -5 \end{aligned}$$

となる。

- (4) $A \subset B$ となるような正の実数 b が存在するための条件は A が有界集合であることである。したがって求める条件は

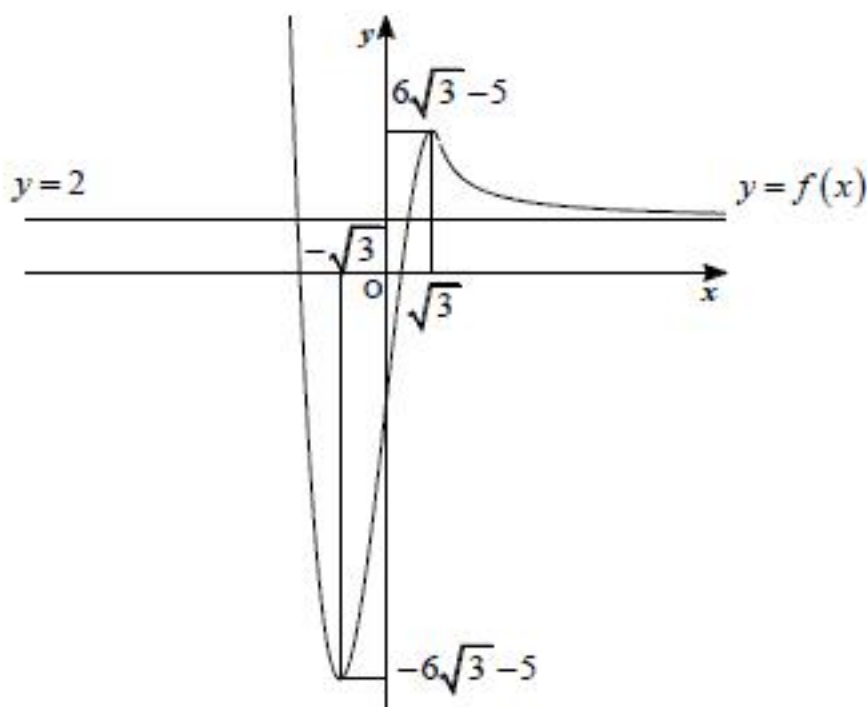
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

より

$$a \leq 2$$

である。

- (5)



$y=f(x)$ のグラフは図のようになる。これより $x_1 < x_2 < x_3$ かつ $x_1, x_3 \in A, x_2 \notin A$ を満たす x_1, x_2, x_3 が存在するための条件は

$$2 < a \leq -5 + 6\sqrt{3}$$

となる。

(1) け d こ e さ i

(2) メ 4 モ 2 ヤ 3 ユ 2 ヨ 3

【解説】

(1)

点Pにおける円Cの接線の方程式は

$$(\cos \theta)x + (\sin \theta)y = 1$$

となる。したがって

$$A\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right)$$

となるので

$$OA = \frac{1}{\cos \theta}, OB = \frac{1}{\sin \theta}$$

である。またこのとき

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \theta}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

となる。

(2)

xz平面で考える。このとき $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $A\left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right)$ とおく。(1)の結果より円錐の母線の長さは

$$AB = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

であり、底面の円の半径は

$$\frac{1}{\cos \theta}$$

である。したがって底面の円の面積は

$$\frac{\pi}{\cos^2 \theta}$$

である。またこの円錐の展開図における扇形の弧の長さは、底面の円の円周に等しく

$$\frac{2\pi}{\cos \theta}$$

である。したがってこの扇形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\pi}{\sin \theta \cos^2 \theta}$$

である。したがってこの円錐の表面積は

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\cos^2 \theta} + \frac{\pi}{\sin \theta \cos^2 \theta} &= \frac{\pi(1 + \sin \theta)}{\sin \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\pi}{\sin \theta(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{\pi}{\frac{1}{4} - \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

となる。したがって表面積は $\sin \theta = \frac{1}{2}$ のとき最小値 4π をとる。またこのときの頂点のz座

標は2である。

この円錐の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\pi}{3 \sin \theta \cos^2 \theta}$$

である。 $t = \sin \theta$ とおくと $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < t < 1$ である。したがって

$$\begin{aligned} &3 \sin \theta \cos^2 \theta \\ &= -3 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \\ &= -3t^3 + 3t \end{aligned}$$

となる。これを $f(t)$ とする。 $f(t)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3(-3t^2 + 1) \\ &= -9\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって $f(t)$ の増減表は下図のようになる。

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f(t)$	×	+	0	-	×
$f'(t)$	×	↗		↘	×

したがって $f(t)$ は $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で最大となる。よって円錐の体積は $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最小値

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$$

をとる。またこのとき頂点のz座標は $\sqrt{3}$ である。