

(2013年度)

4 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は7ページ, 3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し, 所定の欄に氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき, マーク欄からはみ出したり, 白い部分を残したり, 文字や番号, ○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に7, イ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を, $\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2+\boxed{1}x+\boxed{0}$ とする。

1

(1) 素数とは, 1 と自分自身以外に約数をもたない 2 以上の整数である。

(i) p を素数とする。2 次方程式 $x^2 - p^2x + 4p^2 = 0$ が素数 q を解にもつならば, $p = \boxed{\text{ア}}$, $q = \boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) x, y を正の整数, p を素数とする。 $4x^4 + 4y^4 - x^2y^2 = p$ であるならば, $x = \boxed{\text{ウ}}$, $y = \boxed{\text{エ}}$, $p = \boxed{\text{オ}}$ である。

(2) 実数 α, β ($\alpha \leq \beta, \beta \neq 0$) および自然数 n に対して

$$f(n) = \alpha^n + \frac{1}{\beta^n} + 1$$

とおく。 $f(1) = 4, f(2) = 18$ が成り立っているとき,

$$\alpha = \boxed{\text{カ}}, \beta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \text{ である。また, このとき}$$

$$f(n+3) - 4f(n+2) - f(n+1) + 4f(n) = \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3} \\ y \geq |x+1| \end{cases}$$

の表す座標平面上の領域の面積は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

- 2** 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC を考える。点 P, Q, R をそれぞれ辺 AB, BC, CA 上にとり, $AP = a$ ($0 < a < 1$) とする。

- (1) 点 Q, R を $PR \parallel BC$, $QR \parallel AB$ となるようにとるとき, 三角形 PQR の 3 辺の長さの和 ℓ は,

$$\ell = \boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}} a^2 + \boxed{\text{セ}} a + \boxed{\text{ソ}}}$$

と表される。

- (2) 点 Q を $CQ = a$ となるようにとる。点 R が辺 CA 上を動くとき, $PR + QR$ の最小値を m とする。このとき, m を a で表すと,

$$m = \sqrt{\boxed{\text{タ}} a^2 + \boxed{\text{チ}} a + \boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

- (3) 点 Q, R が辺 BC, CA 上を動くとき, 三角形 PQR の 3 辺の長さの和の最小値 n を a で表すと,

$$n = \sqrt{\boxed{\text{テ}} a^2 + \boxed{\text{ト}} a + \boxed{\text{ナ}}}$$

となる。また, 3 辺の長さの和が最小値 n をとるとき, AR, CQ を a で表すと,

$$AR = \frac{\boxed{\text{ニ}} a^2 + \boxed{\text{ヌ}} a}{a + \boxed{\text{ネ}}}, \quad CQ = \frac{\boxed{\text{ノ}} a^2 + \boxed{\text{ハ}} a + \boxed{\text{ヒ}}}{a + \boxed{\text{フ}}}$$

である。

3

A_1, A_2, B_1, B_2 と名前がつけられた4個のさいころがある。これら4個のさいころは、外見上も容易に見分けがつくとする。また、すべてのさいころについて、1から6までのそれぞれの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるとする。

最初に A_1, A_2 のさいころを投げ、以下の2つの条件を満たすように整数 a を決める。

[条件1] a の絶対値 $|a|$ は A_1 の目である。

[条件2] A_2 の目が3または6であるならば $a < 0$ であり、
1, 2, 4, 5 のいずれかであるならば $a > 0$ である。

次に、 B_1 と B_2 のさいころを投げる。 A_1 を B_1 に置き換え、 A_2 を B_2 に置き換えて、上の [条件1], [条件2] を満たすように1つの整数 b を決める。具体例を2つ挙げる。

(例1) A_1 の目が2, A_2 の目が6ならば, $a = -2$

(例2) B_1 の目が3, B_2 の目が1ならば, $b = 3$

(1) 4個のさいころ A_1, A_2, B_1, B_2 を投げるとき, $ab = -1$ となる確

率は $\frac{\boxed{\wedge}}{\boxed{\forall}}$, $ab = 10$ となる確率は $\frac{\boxed{\nabla}}{\boxed{\equiv}}$ である。

(2) 4個のさいころ A_1, A_2, B_1, B_2 を投げることによって決まる整数 a と b を用いて、関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = bx + a$$

また、放物線 $y = f(x)$ を C , 直線 $y = g(x)$ を ℓ とする。

(i) C と ℓ が共有点をもたないような a と b の値の組の総数は、

$\boxed{\Delta}$ である。そのうち、 a と b の符号がいずれも正である

組は $\boxed{\times}$ 組あり、 a と b の符号が異なる組は $\boxed{\text{モ}}$ 組ある。

(ii) C と ℓ が共有点をもたない確率は、 $\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ である。

