

(2013年度)

## 6 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は7ページ, 3問である。)

### 受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し, 所定の欄に氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき, マーク欄からはみ出したり, 白い部分を残したり, 文字や番号, ○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。



## マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。（0または正数の場合は、符号欄にマークしない。）

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。（符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。）

〔解答記入例〕 ア に 7, イ に -26 をマークする場合。

|   | 符号 | 10 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|----|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | －  | 0      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z | 0     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z |
|   | ○  | ●      | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○     | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ● | ○ | ○ | ○ |
| イ | －  | 0      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z | 0     | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z |
|   | ○  | ●      | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○     | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$  を,  $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$  とする。

0 を,  $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$  とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  を,  $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \sqrt{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$  とする。

$-x^2+x$  を,  $\boxed{\phantom{00}}x^2+\boxed{\phantom{00}}x+\boxed{\phantom{00}}$  にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2+\boxed{1}x+\boxed{0}$  とする。

- 1 (1)  $0 \leq x < 2\pi$  であるとし,

$$f(x) = \cos^4 x + \sin 3x - \sin^4 x + 2 \sin x$$

とおく。 $f(x)$  は,  $\sin x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$  のときに最大値  $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$  をと

り,  $\sin x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$  のときに最小値をとる。

- (2) 数列  $\{a_n\}$  を, 次のように定義する。

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

さらに, 数列  $\{a_n\}$  を用いて,

$$S_{n,m} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。

- (i)  $S_{3,6} = \boxed{\text{キ}}$ ,  $S_{4,6} = \boxed{\text{ク}}$  である。一般に, すべての自然数  $n$  に対し, 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} S_{n,6} &= a_{n+2} + \boxed{\text{ケ}} a_{n+4} + a_{n+5} \\ &= a_{n+2} + a_{n+3} + \boxed{\text{コ}} a_{n+4} \\ &= \boxed{\text{サ}} a_{n+4} \end{aligned}$$

- (ii) すべての自然数  $n$  に対し,  $S_{n,10} = qa_{n+r}$  を満たす自然数  $q$ ,  $r$  は,  $q = \boxed{\text{シ}}$ ,  $r = \boxed{\text{ス}}$  である。

2  $a, b$  を実数とし,  $C_1, C_2$  をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする。

$$C_1: y = x^2, \quad C_2: y = -(x - a)^2 + b$$

(1)  $C_1$  と  $C_2$  が共有点をもつための必要十分条件は,

$$a^2 + \boxed{\text{セ}} b \leq 0$$

である。

(2)  $C_1$  と  $C_2$  が異なる 2 つの共有点をもつとき, それらの共有点を  $P, Q$  とする。ただし, 点  $P$  の  $x$  座標を  $p$ , 点  $Q$  の  $x$  座標を  $q$  とすると,  $q < p$  である。このとき,

$$pq = \frac{1}{\boxed{\text{ソ}}} \left( a^2 + \boxed{\text{タ}} b \right)$$

が成り立つ。点  $P$  における  $C_1$  の接線を  $\ell$ , 点  $Q$  における  $C_1$  の接線を  $m$  とする。直線  $\ell$  は,

$$y = \boxed{\text{チ}} px + \boxed{\text{ツ}} p^2$$

と表される。

$a > 0, b = \frac{7}{2}$  とし, 直線  $\ell$  と  $m$  が直交するならば,

$$a = \sqrt{\boxed{\text{テ}}}, \quad p = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\boxed{\text{ト}}} + \boxed{\text{ナ}} \right)$$

となる。このとき,  $C_1$  と  $C_2$  で囲まれた図形の面積は,  $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$  である。

**3**  $xy$  平面に、次のような3つの壁  $L, U, S$  がある (図1)。

$$L = \{(x, -2) \mid 0 \leq x \leq 9\}, \quad U = \{(x, 4) \mid 0 \leq x \leq 9\}$$

$$S = \{(9, y) \mid -2 < y < 4\}$$

$xy$  平面上を動く点  $P(m, n)$  を考える。P が移動できる点は、 $(m+1, n+1)$  または  $(m+1, n-1)$  である (図2)。P は原点  $O$  を出発して壁  $L, U, S$  のいずれかに到達するまで移動を続け、いずれかの壁に到達すると移動を停止する。

- (1) 原点  $O$  を出発した P が壁  $U$  に到達して移動を停止する場合の経路の数を考える。点  $(4, 4)$  に到達して移動を停止する場合の経路の数は、図3のように1通りである。また、点  $(6, 4)$ 、点  $(8, 4)$  に到達して移動を停止する場合の経路の数は、それぞれ ネ

通り、ノ 通りである。

- (2) 原点  $O$  を出発した P が壁  $L$  に到達して移動を停止する場合の経路の数は、全部で ハ 通りある。

- (3)  $P(m, n)$  が  $(m+1, n+1)$  に移動する確率と、 $P(m, n)$  が  $(m+1, n-1)$  に移動する確率が、いずれも  $\frac{1}{2}$  であるとする。このとき、原点  $O$  を出発した P が壁  $L$  に到達して停止する確率を既約分数  $\frac{a}{2^b}$  の形で表すと、 $a =$ ヒ $, b =$ フ である。また、P が壁  $S$  へ到達して停止する確率を既約分数  $\frac{c}{2^d}$  の形で表すと、 $c =$ ヘ $, d =$ ホ である。

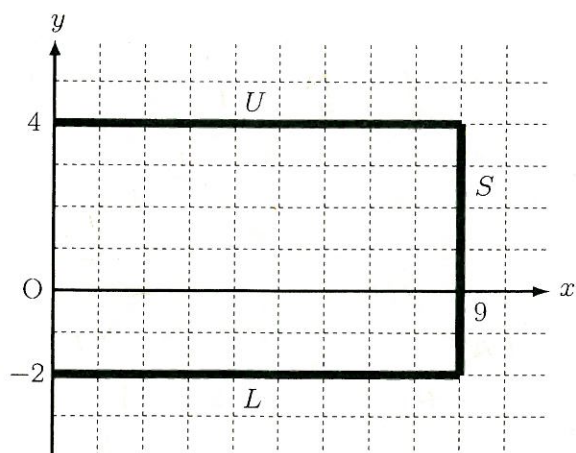


图 1

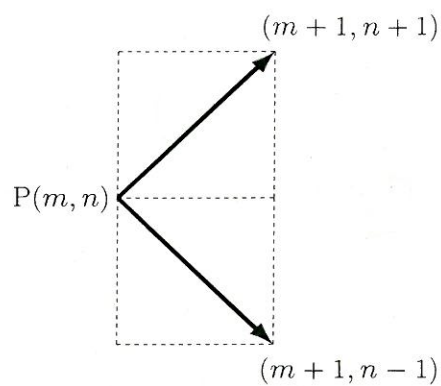


图 2

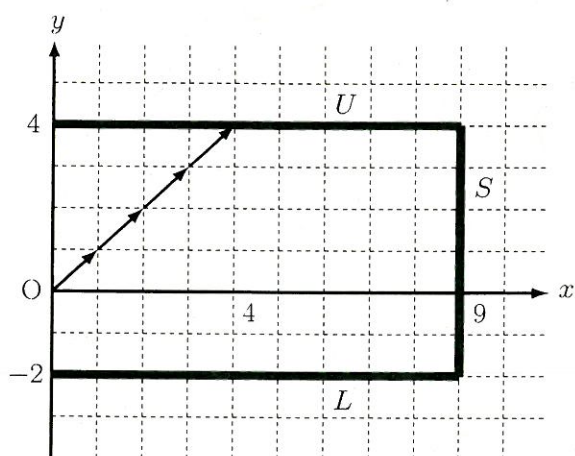


图 3