

(2013年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ, 4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し, 所定の欄に氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき, マーク欄からはみ出したり, 白い部分を残したり, 文字や番号, ○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に7, イ に－26をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
イ	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を, $\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2+\boxed{1}x+\boxed{0}$ とする。

以下の問題すべてを通して、 π は円周率を表す。

1 (1) 次の行列が表す xy 平面上の 1 次変換を、下の選択肢から選べ。

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は あ , $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は い , $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ は う である。

あ , い , う の選択肢：

- (a) 原点に関する対称移動 (b) 恒等変換
- (c) x 軸に関する対称移動 (d) y 軸に関する対称移動
- (e) 直線 $y = x$ に関する対称移動
- (f) 直線 $y = -x$ に関する対称移動
- (g) 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称移動
- (h) 原点のまわりの 30° の回転移動
- (i) 原点を中心として $\sqrt{3}$ 倍に拡大する移動
- (j) 点 $(1, 1)$ のまわりの 30° の回転移動
- (k) 直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称移動
- (l) 原点のまわりの 60° の回転移動

xy 平面上の原点 O と異なる点 P を、上記選択肢 (c) の 1 次変換で移し、さらに選択肢 (h) の 1 次変換で移した点 Q は、直線 OP 上にあった。

このとき、 OQ の長さは OP の長さの ア 倍になる。

また、点 P は 2 本の直線

$$y = \left(\pm \text{ イ } - \sqrt{\text{ ウ }} \right) x$$

のいずれかの上にある。

- (2) 池の周りに、池を囲むように8本の木が植えられている。これらの木の間に、全部で3本のチューリップを植える。ただし、木はそれぞれ見分けがつくものとする。チューリップは、異なる色のものは見分けることができ、同じ色のものは見分けられないものとする。それぞれの木の間にはチューリップを複数本植えてよく、その順番や配置などは区別しないものとする。

このとき、

- (i) 赤、黄、白のチューリップを1本ずつ植える方法は エ 通りある。
- (ii) 赤いチューリップを2本、黄色いチューリップを1本植える方法は オ 通りある。
- (iii) 赤いチューリップを3本植える方法は カ 通りある。

2

xy 平面上の点 $A(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ を中心とする半径 4 の円を R とする。糸の一方の端点を原点 O に固定し、糸をたるみのない状態で円 R に下側から 1 点で接するように張ったとき、 O と反対側の糸の端点を P とする。糸と円 R との接点を B とするとき、 BP の長さが 4π であった。

(1) $OB = \boxed{\text{キ}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であり、 OB と x 軸の正の向きとのなす角は $\boxed{\text{ケ}}^\circ$ である。また B の x 座標は $\boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(2) 次に糸をたるみのないように張ったままの状態、点 B を起点として糸の BP の部分を毎秒 30° の割合で円 R に巻きつけていく。糸が巻きついている部分の、 B ではない方の端点を C とする。 $0 \leq t \leq 6$ とするとき、巻きつけ始めてから t 秒後の時点で、

$$\overrightarrow{AC} = \boxed{\text{ス}} (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} \left(t - \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \right) \text{ ラジアン,}$$

である。ただし $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。また

$$CP = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \pi \left(\boxed{\text{テ}} - t \right)$$

である。このときの点 P の速さは、

$$\frac{\pi^a}{\boxed{\text{ト}}} \left(\boxed{\text{ナ}} - t \right), \quad \text{ただし } a = \boxed{\text{ニ}},$$

である。

3 s, t を実数とし、関数

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9x - 5 & (x \leq 2) \\ \frac{3}{x-t} + s & (x > 2) \end{cases}$$

がすべての実数 x に対して定義され、 $x = 2$ で微分可能であるとする。
また、実数 a と正の実数 b に対し、

$$A = \{x \mid f(x) < a\}, \quad B = \{x \mid -b < x < b\}$$

とする。

(1) $t =$, $s =$ である。

(2) A が空集合であるための必要十分条件は、

$$a \text{ + \sqrt{\text{}}$$

である。

(3) $B \subset A$ となる正の実数 b が存在するための必要十分条件は、

$$a \text{$$

である。

(4) $A \subset B$ となる正の実数 b が存在するための必要十分条件は、

$$a \text{$$

である。

(5) $x_1 < x_2 < x_3$ かつ $x_1, x_3 \in A, x_2 \notin A$ を満たす実数 x_1, x_2, x_3 が存在するための必要十分条件は、

$$a \text{ かつ } a \text{ + \sqrt{\text{}}$$

である。

$\sim$ の選択肢：

(a) = (b) < (c) $\leq$ (d) > (e) $\geq$ (f) $\neq$

4

(1) xy 平面上で、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とし、点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ における C の接線が x 軸と交わる点を A , y 軸と交わる点を B とする。

$$OA = \boxed{\text{け}}, \quad OB = \boxed{\text{こ}}, \quad AB = \boxed{\text{さ}}$$

である。

$\boxed{\text{け}}, \boxed{\text{こ}}, \boxed{\text{さ}}$ の選択肢：

- (a) $\cos \theta$ (b) $\sin \theta$ (c) $\tan \theta$ (d) $\frac{1}{\cos \theta}$ (e) $\frac{1}{\sin \theta}$
 (f) $\frac{1}{\tan \theta}$ (g) $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ (h) $\frac{1}{\sin^2 \theta}$ (i) $\frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$

(2) xyz 空間において、頂点が z 軸上の正の部分にあり、底面が xy 平面上にある直円錐で、その側面が原点を中心とする半径 1 の球面に接しているものを考える。そのような直円錐のうち、表面積が最小になる場合を考えると、その表面積は $\boxed{\text{メ}} \pi$ であり、頂点

の z 座標は $\boxed{\text{モ}}$ である。また、体積が最小になる場合を考え

ると、その体積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヤ}}}}{\boxed{\text{ユ}}} \pi$ であり、頂点の z 座標は $\sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}$ である。