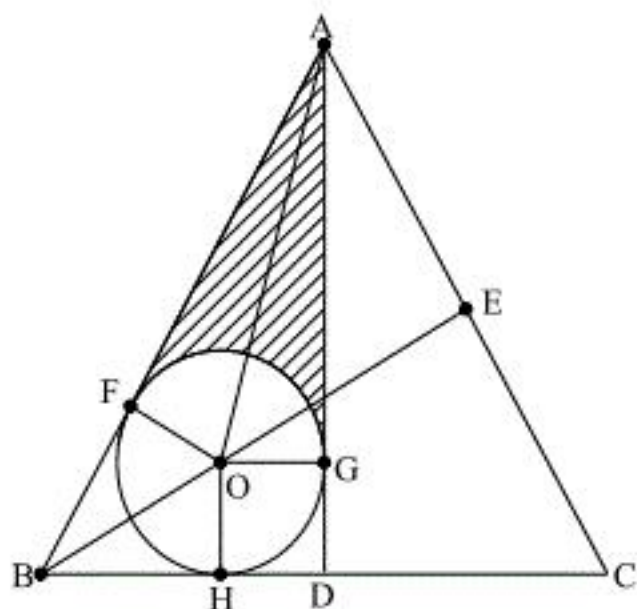


【解答】

ア 1	イ 3	ウ 2	エ 3	オ 2
カ 6	キ 2	ク 6	ケ 2	コ 2
サ 3	シ -5	ス 12		

【解説】

OB, BE は共に $\angle ABC$ の 2 等分線であるので、下図のように O は線分 BE 上に位置する。



(1)

BE は $\angle ABC$ の二等分線であり、 $OH = 1$ であるから、 $BF = BH = \sqrt{3}$ であり、

$$AE = BD = 1 + \sqrt{3}$$

となる。

(2)

$AB = 2(1 + \sqrt{3}) = 2 + 2\sqrt{3}$ となるので、

$$AF = AG = 2 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

である。

(3)

$\triangle AFO$ において三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AO &= \sqrt{AF^2 + OF^2} \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

$\angle FOG = 180^\circ - \angle FAG = 150^\circ$ であるので、 $\triangle OFG$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} FG &= \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(5)

$$\begin{aligned} \triangle AFO + \triangle AGO - (\text{扇形 OFG}) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 + \sqrt{3}) \cdot 2 - 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{150}{360} \\ &= 2 + \sqrt{3} - \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

と求まる。

〔解答〕

セ	5	ソ	2	タ	5	チ	4	ツ	-3
テ	5	ト	-2	ナ	7	ニ	-1	ヌ	7
ネ	-7	ノ	4	ハ	7	ヒ	-10	フ	3
ヘ	7	ホ	3	マ	7				

〔解答〕

(1)

 C と l の共有点の x 座標は

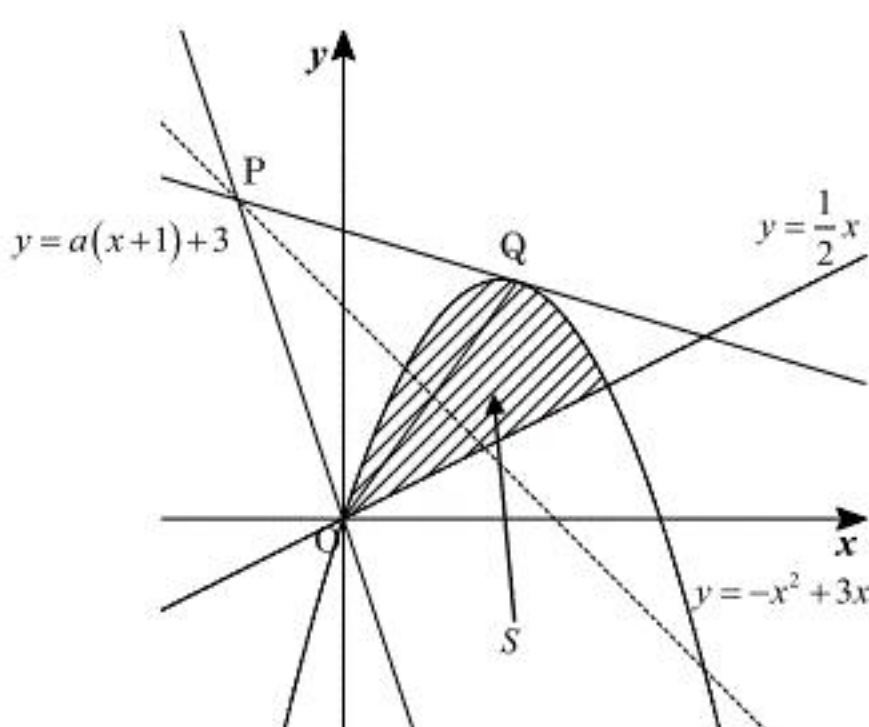
$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= \frac{1}{2}x \\ \Leftrightarrow x(2x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。 $x = \frac{5}{2}$ を l に代入して

$$y = \frac{5}{4}$$

を得る。従って求める点は、 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ である。

(2)

点 P を通り、傾きが a の直線 m は

$$m: y = a(x+1) + 3$$

と表される。 S と m が共有点を持つように a を変化させればよいので、 a が最大となるのは m が C に接するときである。従って m と C の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= a(x+1) + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 + (a-3)x + a+3 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

の解である。これが重解を持つので判別式を D として

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 5 \pm 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。グラフより傾きは負なので $a = 5 - 2\sqrt{7}$ である。また、 a の最小値は m が点 O を通るときなので

$$\begin{aligned} 0 &= a(0+1) + 3 \\ \Leftrightarrow a &= -3 \end{aligned}$$

である。これより、 a の範囲は $-3 \leq a \leq 5 - 2\sqrt{7}$ とわかる。

(3)

①に $a = 5 - 2\sqrt{7}$ を代入して

$$\begin{aligned} x^2 - (2\sqrt{7} - 2)x + 8 - 2\sqrt{7} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ x - (\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}) \right\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} \end{aligned}$$

である。これより Q の x 座標は

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} \\ &= \sqrt{7} - 1 \end{aligned}$$

である。また、 y 座標は C に代入して

$$y = 5\sqrt{7} - 11$$

である。

(4)

 $P(-1, 3)$, $Q(\sqrt{7} - 1, 5\sqrt{7} - 11)$ より

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} |(-1)(5\sqrt{7} - 11) - 3(\sqrt{7} - 1)|$$

と立式できるので、これを計算すると

$$\triangle OPQ = 4\sqrt{7} - 7$$

が得られる。

(5)

線分 OQ と曲線 C で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{7}-1} \left\{ (-x^2 + 3x) - \frac{5\sqrt{7}-11}{\sqrt{7}-1}x \right\} dx &= \int_0^{\sqrt{7}-1} \left[-x \left\{ x - (\sqrt{7}-1) \right\} \right] dx \\ &= \frac{1}{6} (\sqrt{7}-1)^3 \\ &= \frac{5\sqrt{7}-11}{3} \end{aligned}$$

となるので、求める面積は

$$(4\sqrt{7} - 7) - \frac{5\sqrt{7}-11}{3} = \frac{-10}{3} + \frac{7}{3}\sqrt{7}$$

である。

【3】

【解答】

ミ.3	ム.4	メ.3	モ.4	ヤ.5	ユ.3
ヨ.2	ラ.3	リ.2	ル.4	レ.8	ロ.5

【解説】

座標平面上の3点

$$A(1, 0), B(\cos 2t, \sin 2t), C(\cos(-t), \sin(-t)) \quad (0 < t < 2\pi)$$

はすべて単位円上の点であるため、この3点は全て極座標 $(1, \theta)$ を用いて表すことができる。

このとき、それぞれの偏角は

Aの偏角:0

Bの偏角: $2t$

Cの偏角: $-t$

であることに注意する。また、以後単位円上の点P, Qに対して

$$\{P, Q\}$$

で偏角の差の絶対値を表すことにする。

(1)

単位円上の点P, Qが一致するということは、ある整数 m が存在して

$$\{P, Q\} = 2m\pi$$

と表せるということと同値であるから、2点A, Bが一致するのは

$$\{A, B\} = 2m_1\pi$$

$$\Leftrightarrow |2t - 0| = 2m_1\pi$$

$$\therefore |t| = m_1\pi$$

を満たす整数 m_1 が存在するときである。ここで、 $0 < t < 2\pi$ であることに注意すれば、

$$t = \pi$$

であることがわかる。同様にして、2点B, Cが一致するのは

$$\{B, C\} = 2m_2\pi$$

$$\Leftrightarrow |t| = \frac{2}{3}m_2\pi$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

のときであり、2点C, Aが一致することは

$$\{C, A\} = 2m_3\pi$$

$$\Leftrightarrow |t| = 2m_3\pi$$

なる整数 m_3 が存在することと同値であるから、そのような t はないことがわかる。したがって、3点A, B, Cのうち、少なくとも2点が一致するような t は

$$t = \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi$$

の3個であり、その中で最大の t は $\frac{4}{3}\pi$ である。

(2)

$\triangle ABC$ が直角三角形になるということは、線分ABまたはBCまたはCAが単位円の直径になることと同値である。また、2点P, Qが単位円の直径になるということは、ある整数 m が存在して

$$\{P, Q\} = (2m+1)\pi$$

と表せることと同値である。よって、(1)と同様に考えれば、線分ABが直径になるのは

$$\{A, B\} = (2m_1+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow |2t - 0| = (2m_1+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow |t| = \frac{2m_1+1}{2}\pi$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

であり、線分BCが直径になるのは

$$\{B, C\} = (2m_2+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow |t| = \frac{2m_2+1}{3}\pi$$

$$\therefore t = \frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \quad (\because t \neq \pi)$$

であり、線分CAが直径になるのは

$$\{C, A\} = (2m_3+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow |t| = (2m_3+1)\pi$$

なる整数 m_3 が存在しないから、ありえないことがわかる。したがって、題意を満たす t は

$$t = \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

の4個であり、その中で最大の t は $\frac{5}{3}\pi$ である。

(3)

原点をOとすると、 $\triangle ABC$ が $AC=BC$ を満たすということは

$$\angle COA = \angle COB \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たすことと同値である。また、単位円上の2点P, Qに対して $\angle POQ$ は

$$\{P, Q\} = 2m\pi + \alpha \quad (-\pi \leq \alpha < \pi)$$

を満たすような整数 m をとったときに

$$\angle POQ = |\alpha|$$

と表されるから、これを用いると①が成立するとき、

$$|\{C, A\} - 2m_3\pi| = |\{B, C\} - 2m_2\pi|$$

$$\Leftrightarrow ||t| - 2m_3\pi| = |3|t| - 2m_2\pi|$$

$$\Leftrightarrow |t| - 2m_3\pi = 3|t| - 2m_2\pi \quad \text{または} \quad |t| - 2m_3\pi = -(3|t| - 2m_2\pi)$$

$$\Leftrightarrow |t| = (m_2 - m_3)\pi \quad \text{または} \quad |t| = \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\pi$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

であるから、これが必要条件となる。逆に $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ のとき、どちらのときも

$$\angle COA = \angle COB = \frac{1}{2}\pi$$

となるから、条件を満たすことが確認できる。したがって、題意の条件を満たす t は

$$t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

の2個であり、その中で最大の t は $\frac{3}{2}\pi$ である。

(4)

(3)と同様に考えれば、 $\triangle ABC$ が $AB=BC$ を満たすということは

$$\angle BOA = \angle BOC \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たすことと同値であり、②が成り立つとき、

$$|\{A, B\} - 2m_1\pi| = |\{B, C\} - 2m_2\pi|$$

$$\Leftrightarrow |2|t| - 2m_1\pi| = |3|t| - 2m_2\pi|$$

$$\Leftrightarrow 2|t| - 2m_1\pi = 3|t| - 2m_2\pi \quad \text{または} \quad 2|t| - 2m_1\pi = -(3|t| - 2m_2\pi)$$

$$\Leftrightarrow |t| = -(m_1 - m_2)\pi \quad \text{または} \quad |t| = \frac{2}{5}(m_1 + m_2)\pi$$

$$\therefore t = \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$$

であるから、これが必要条件となる。逆に $t = \frac{2}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$ のとき、

$$\angle BOA = \angle BOC = \frac{4}{5}\pi$$

となり、 $t = \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi$ のとき

$$\angle BOA = \angle BOC = \frac{2}{5}\pi$$

となるから、条件を満たすことが確認できる。したがって、題意の条件を満たす t は

$$t = \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$$

の4個であり、その中で最大の t は $\frac{8}{5}\pi$ である。