

〔解答〕

ア. 1 イ. 0 ウ. 4 エ. 3

オ. 2 カ. 2 キ. 1 ク. 4

ケ. 30 コ. 60

〔解説〕

(1)

整式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を整式 $x^2 + 3$, $x^2 + x + 2$ で割ると、それぞれ

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (ax + b)(x^2 + 3) + (-3a + c)x + (-3b + d)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \{ax + (-a + b)\}(x^2 + x + 2) + (-a - b + c)x + (2a - 2b + d)$$

となる。題意より、それぞれの余りが $x + 3$, $3x + 5$ になることに注意して、係数比較をすると

$$\begin{cases} -3a + c = 1 & \cdots \text{①} \\ -3b + d = 3 & \cdots \text{②} \\ -a - b + c = 3 & \cdots \text{③} \\ 2a - 2b + d = 5 & \cdots \text{④} \end{cases}$$

となる。ここで①, ②を③, ④に代入すると

$$\begin{cases} c = 3a + 1 & \cdots \text{①} \\ d = 3b + 3 & \cdots \text{②} \\ 2a - b = 2 & \cdots \text{⑤} \\ 2a + b = 2 & \cdots \text{⑥} \end{cases}$$

となるが、⑤, ⑥より

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

となることがわかる。さらにこれを①, ②に代入すれば

$$\begin{cases} c = 4 \\ d = 3 \end{cases}$$

と求まる。

(2)

与えられた関数 $f(x)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_2 x)^2 + \log_2 (\sqrt{2}x) \\ &= (\log_2 x)^2 + \log_2 x + \log_2 \sqrt{2} \\ &= (\log_2 x)^2 + \log_2 x + \frac{1}{2} \\ &= \left(\log_2 x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となるから、関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} \log_2 x &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 2^{-\frac{1}{2}} \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

のときに最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

(3)

問題で与えられた表より、1本のくじを引いたときの賞金とその確率の関係は以下の表のようになる。

賞金	1000	500	200	0
確率	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{92}{100}$

したがって、1本のくじを引いたときの賞金の期待値は

$$1000 \cdot \frac{1}{100} + 500 \cdot \frac{2}{100} + 200 \cdot \frac{5}{100} + 0 \cdot \frac{92}{100} = \frac{3000}{100} = 30$$

である。また、2本のくじを引いたときの賞金とその確率の関係は以下の表のようになる。

賞金	1500	1200	1000	700	500	400	200	0
確率	$\frac{1 \times 2}{100C_2}$	$\frac{1 \times 5}{100C_2}$	$\frac{1 \times 92}{100C_2} + \frac{{}_2C_2}{100C_2}$	$\frac{2 \times 5}{100C_2}$	$\frac{2 \times 92}{100C_2}$	$\frac{{}_5C_2}{100C_2}$	$\frac{5 \times 92}{100C_2}$	$\frac{{}_{92}C_2}{100C_2}$

したがって、2本のくじを引いたときの賞金の期待値は

$$\begin{aligned} & 1500 \cdot \frac{1 \times 2}{100C_2} + 1200 \cdot \frac{1 \times 5}{100C_2} + 1000 \cdot \left(\frac{1 \times 92}{100C_2} + \frac{{}_2C_2}{100C_2} \right) + 700 \cdot \frac{2 \times 5}{100C_2} + 500 \cdot \frac{2 \times 92}{100C_2} \\ & + 400 \cdot \frac{{}_5C_2}{100C_2} + 200 \cdot \frac{5 \times 92}{100C_2} + 0 \cdot \frac{{}_{92}C_2}{100C_2} \\ & = \frac{3000 + 6000 + 93000 + 7000 + 92000 + 4000 + 92000 + 0}{4950} \\ & = 60 \end{aligned}$$

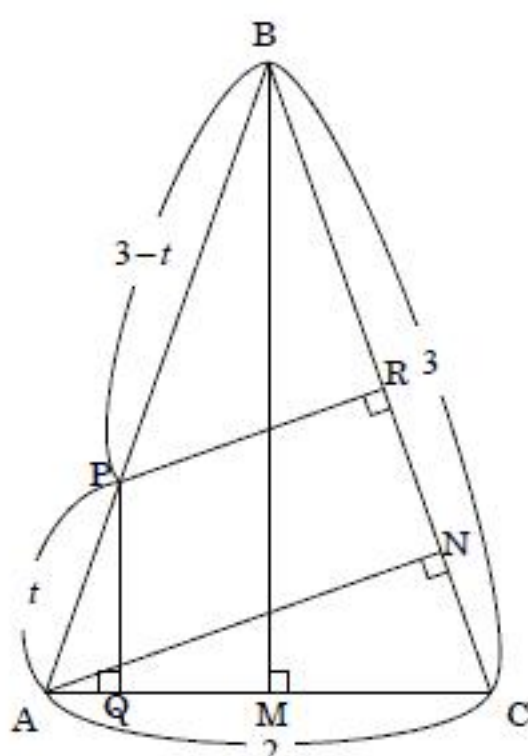
である。

〔解答〕

サ	-1	シ	3	ス	2	セ	7	ソ	9
タ	2	チ	3	ツ	3	テ	2	ト	2
ナ	2	ニ	3	ヌ	16	ネ	9	ノ	18
ハ	7	ヒ	64	フ	63	ヘ	2		

〔解説〕

(1)



上図のように、点Bから辺ACに下した垂線をBM、点Aから辺BCに下した垂線をANとする。 $\triangle APQ$ と $\triangle ABM$ は相似なので

$$\begin{aligned} AQ &= \frac{AP}{AB} \cdot AM \\ &= \frac{1}{3}t \end{aligned}$$

である。従って、 $CQ = \frac{1}{3}t + 2$ が得られる。また、CNの長さをxとすると $\triangle ACN$ と $\triangle ABN$ に注目して

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &= 9 - (3 - x)^2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。 $\triangle PBR$ と $\triangle ABN$ は相似なので

$$\begin{aligned} BR &= \frac{BP}{AB} \cdot BN \\ &= \frac{7}{9}(3 - t) \end{aligned}$$

である。従って、 $CR = \frac{7}{9}t + \frac{2}{3}$ が得られる。

(2)

$\triangle CBM$ に注目すると

$$\cos \angle C = \frac{1}{3}, \sin \angle C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

が得られる。ここで、 $\triangle CQR$ について余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} QR^2 &= CQ^2 + CR^2 - 2 \cdot CQ \cdot CR \cdot \cos \angle C \\ &= \frac{8}{27}(3t^2 - 4t + 12) \end{aligned}$$

である。 QR^2 が最大、最小になるときにQRが最大、最小になる。 $f(t) = 3t^2 - 4t + 12$ とおくと $f'(t) = 6t - 4$ である。増減表を書くと下のようになる。

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	3
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	12	$\searrow$	$\frac{32}{3}$	$\nearrow$	27

これより、QRは $t=3$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとり、 $t=\frac{2}{3}$ のとき最小値 $\frac{16}{9}$ をとる。

(3)

三角形CQRの面積をtで表すと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot CQ \cdot CR \cdot \sin \angle C &= \frac{\sqrt{2}}{81}(-7t^2 + 36t + 36) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{81} \left\{ -7 \left(t - \frac{18}{7} \right)^2 + \frac{576}{7} \right\} \end{aligned}$$

となる。従って、 $t=\frac{18}{7}$ のとき最大値 $\frac{64}{63}\sqrt{2}$ をとる。

〔解答〕

ホ 1 マ 2 ミ 1 ム 1 メ 1 モ -2 ヤ 3 ユ 2
 ヨ 3 ラ 1 リ -1 ル 2 レ 3 ロ -1 ワ 3 ヲ 2

〔解説〕

$$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = (x+a)^2 - 1^2 \\ = (x+a-1)(x+a+1)$$

より,

$$|x^2 + 2ax + a^2 - 1| = \begin{cases} x^2 + 2ax + a^2 - 1 & x \leq -a-1, -a+1 \leq x \text{ のとき} \\ -(x^2 + 2ax + a^2 - 1) & -a-1 < x < -a+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

であることに注意する。

(1)

上で述べたことに注意すると,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) dx \\ = -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ = \frac{1}{2}$$

となる。

(2)

先に注意したことから, 積分区間がすべて $-a+1 \leq x$ に含まれていればよいから,

$$-a+1 \leq 0 \therefore a \geq 1$$

となる。

(3)

 $a \geq 1$ のとき,

$$S(a) = \int_0^1 (x^2 + 2ax + a^2 - 1) dx \\ = \left[\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (a^2 - 1)x\right]_0^1 \\ = a^2 + a - \frac{2}{3}$$

である。また, $0 \leq a < 1$ のとき,

$$S(a) = -\int_0^{-a+1} (x^2 + 2ax + a^2 - 1) dx + \int_{-a+1}^1 (x^2 + 2ax + a^2 - 1) dx \\ = -\left[\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (a^2 - 1)x\right]_0^{-a+1} + \left[\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (a^2 - 1)x\right]_{-a+1}^1 \\ = \frac{2}{3}a^3 + a^2 - a + \frac{2}{3}$$

である。

(4)

 $a \geq 1$ のとき,

$$S(a) = a^2 + a - \frac{2}{3} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{12}$$

は単調増加であるから, $0 \leq a \leq 1$ における最小値を求めればよい。 $0 < a < 1$ において,

$$S'(a) = 2a^2 + 2a - 1$$

であり, $S'(a) = 0$ を解くと, $a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ であるから, 次のような増減表が書ける。

a	0	...	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	...	1
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって, $S(a)$ は $a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき最小値をとることがわかる。