

1

【解答】

- (1)

$\boxed{\text{ア}}$	0	$\boxed{\text{イ}}$	1	$\boxed{\text{ウ}}$	1	$\boxed{\text{エ}}$	-3	$\boxed{\text{オ}}$	2
$\boxed{\text{カ}}$	1	$\boxed{\text{キ}}$	2	$\boxed{\text{ク}}$	-1	$\boxed{\text{ケ}}$	2	$\boxed{\text{コ}}$	-3
$\boxed{\text{サ}}$	2	$\boxed{\text{シ}}$	1	$\boxed{\text{ス}}$	2	$\boxed{\text{セ}}$	1	$\boxed{\text{ソ}}$	0
- (2) $\boxed{\text{タ}}$ 17 $\boxed{\text{チ}}$ 52

【解説】

- (1) x の範囲で以下のように場合分けを行う。
- [1] $x \leq 0, x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 (x-1)(x-t) dt \\ &= x(x-1) \int_0^1 dt - (x-1) \int_0^1 t dt \\ &= x(x-1) \left[t \right]_0^1 - (x-1) \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= (x^2 - x) - \frac{1}{2}(x-1) \\ &= x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

- [2] $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x -(x-1)(x-t) dt + \int_x^1 (x-1)(x-t) dt \\ &= -x(x-1) \int_0^x dt + (x-1) \int_0^x t dt + x(x-1) \int_x^1 dt - (x-1) \int_x^1 t dt \\ &= (x-1) \left\{ -x \left[t \right]_0^x + \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^x + x \left[t \right]_x^1 - \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_x^1 \right\} \\ &= (x-1) \left(-x^2 + \frac{1}{2} x^2 + x - x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^2 \right) \\ &= (x-1) \left(-x^2 + x - \frac{1}{2} \right) \\ &= -x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & (x \leq 0, x \geq 1) \\ -x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & (0 < x < 1) \end{cases}$$

である。ここで、 $x \leq 0, x \geq 1$ のときは

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \\ &= \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

より、最小値は $x=1$ のときで、 $f(x)=0$ となる。また、 $0 < x < 1$ のときは

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 4x - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(6x^2 - 8x + 3) \end{aligned}$$

であり、

$$g(x) = 6x^2 - 8x + 3$$

とおくと、その判別式は

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 4^2 - 6 \cdot 3 \\ &= -2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

となるから、 $g(x)$ は常に正である。よって、 $0 < x < 1$ のとき $f'(x)$ は常に負であり、 $f(x)$ は単調減少する。以上より、関数 $f(x)$ は $x=1$ のとき、最小値 0 をとる。

- (2)

$m \leq n$ としても一般性を失わない。 m, n は自然数より

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &< \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{3} \\ \therefore \frac{1}{m} &< \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow 3 &< m \end{aligned}$$

となり、 m の取り得る値の最小値は 4 である。以下 m の値で場合分けをして調べる。

- [1] $m=4$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< \frac{1}{3} - \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12} \\ \therefore 12 &< n \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ が最大となるのは、 $m=4, n=13$ のときで $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{17}{52}$ となる。

- [2] $m=5$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< \frac{1}{3} - \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{15} \\ \therefore \frac{15}{2} &< n \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ が最大となるのは、 $m=5, n=8$ のときで $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{13}{40}$ となる。

- [3] $m=6$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< \frac{1}{3} - \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \\ \therefore 6 &< n \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ が最大となるのは、 $m=6, n=7$ のときで $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{13}{42}$ となる。

- [4] $m \geq 7$ のとき

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} \leq \frac{2}{7}$ より、 $m \geq 7$ のときの $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ の最大値は $m=n=7$ のときの $\frac{2}{7}$ であり、 $\frac{2}{7} < \frac{1}{3}$ を満たすから、 $\frac{2}{7}$ が求めたい最大値である。

以上[1], [2], [3], [4]より $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ の最大値としてあり得るのは、 $\frac{17}{52}, \frac{13}{40}, \frac{13}{42}, \frac{2}{7}$ である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{17}{52} &= 0.326... \\ \frac{13}{40} &= 0.325 \\ \frac{13}{42} &= 0.309... \\ \frac{2}{7} &= 0.285... \end{aligned}$$

より、 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ の最大値は $\frac{17}{52}$ である。

2

【解答】

- (1)

ツ	1
チ	6
ト	-8
ナ	2
ニ	1
コ	4
セ	4
ノ	-4
ハ	4
ヒ	9
フ	-2
- (2)

ヘ	1
ホ	4
マ	1
ミ	4

【解説】

- (1) $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $f(x) = -ax^2 + 1$ であり、 a は 0 以上の実数より、関数 $f(x)$ は単調減少する。よって、この区間の最大値は $f(0)$ 、最小値は $f(1)$ である。つづいて、 $1 \leq x \leq 3$ のとき、 $a = 0$ のときは

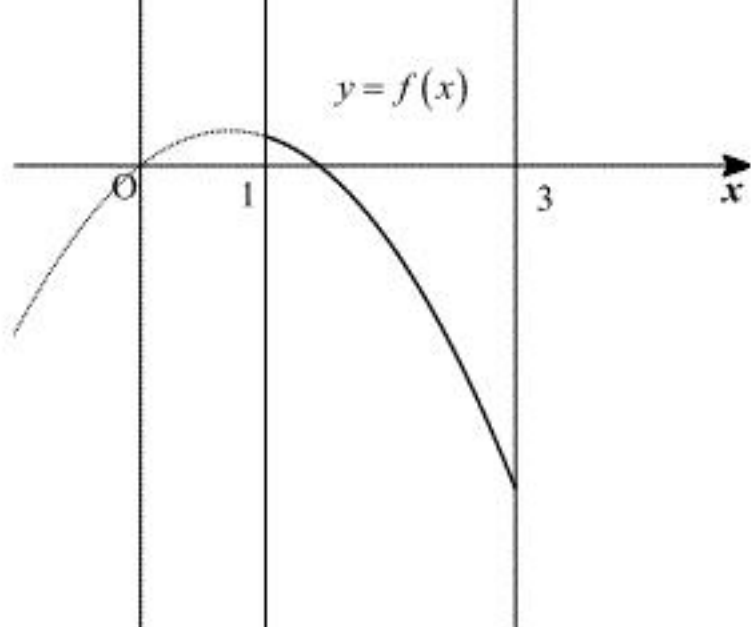
$$f(x) = x$$

となるから、この区間の最大値は $f(3)$ 、最小値は $f(1)$ となる。 $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -ax^2 + x \\ &= -a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

である。 $1 \leq x \leq 3$ の区間について、 a の値で以下のように場合分けを行う。

- [1] $0 \leq \frac{1}{2a} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a$ のとき

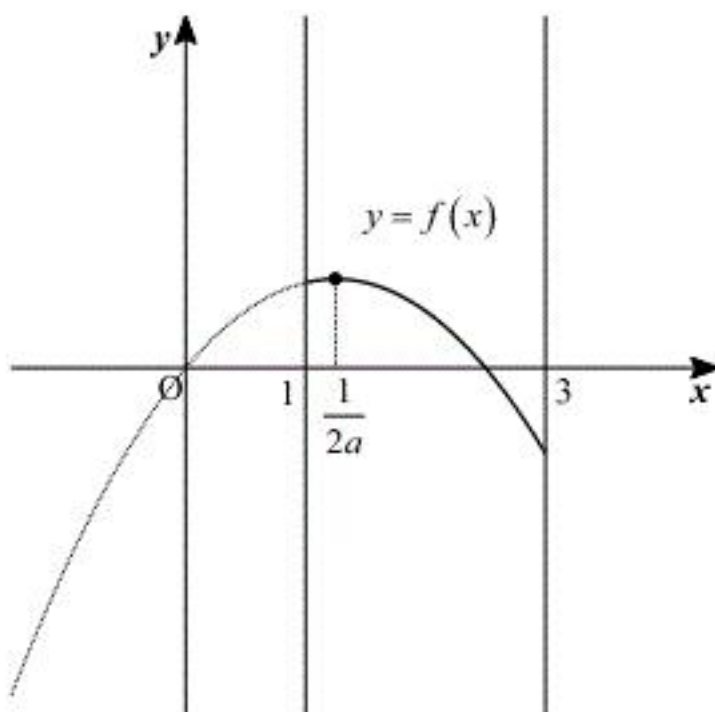


上図より、 $1 \leq x \leq 3$ の区間の最大値は $f(1)$ 、最小値は $f(3)$ である。よって、 $0 \leq x \leq 1$ の区間と合わせると、

$$M(a) = f(0), m(a) = f(3)$$

となる。

- [2] $1 \leq \frac{1}{2a} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{2}$ のとき



上図より、 $1 \leq x \leq 3$ の区間の最大値は $f\left(\frac{1}{2a}\right)$ 、最小値は $f(3)$ である。ここで、 $f(0)$ と

$f\left(\frac{1}{2a}\right)$ の大小関係について、

$$\begin{aligned} f(0) &> f\left(\frac{1}{2a}\right) \\ \Leftrightarrow 1 &> \frac{1}{4a} \\ \therefore a &> \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となることから、

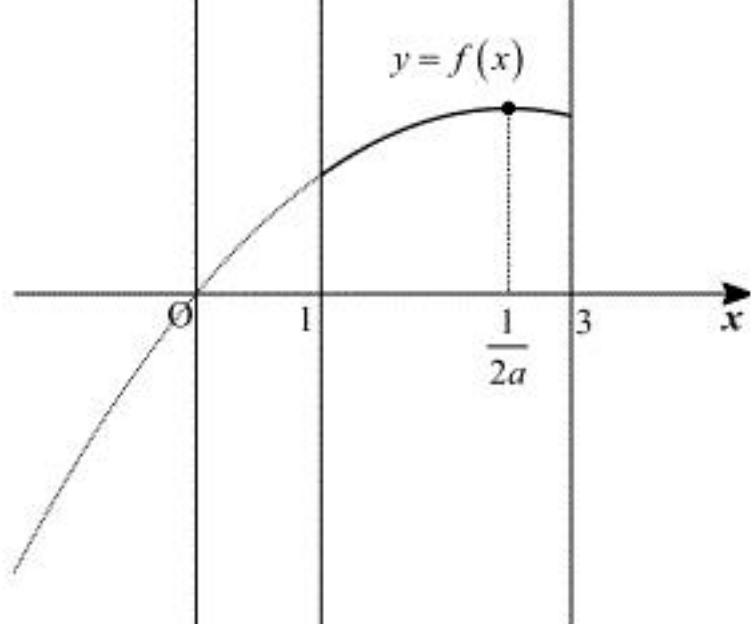
$$\begin{cases} f(0) > f\left(\frac{1}{2a}\right) & \left(\frac{1}{4} < a \text{ のとき} \right) \\ f\left(\frac{1}{2a}\right) > f(0) & \left(a \leq \frac{1}{4} \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。よって、 $0 \leq x \leq 1$ の区間と合わせると、

$$M(a) = f(0), m(a) = f(3)$$

となる。

- [3] $2 \leq \frac{1}{2a} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{4}$ のとき



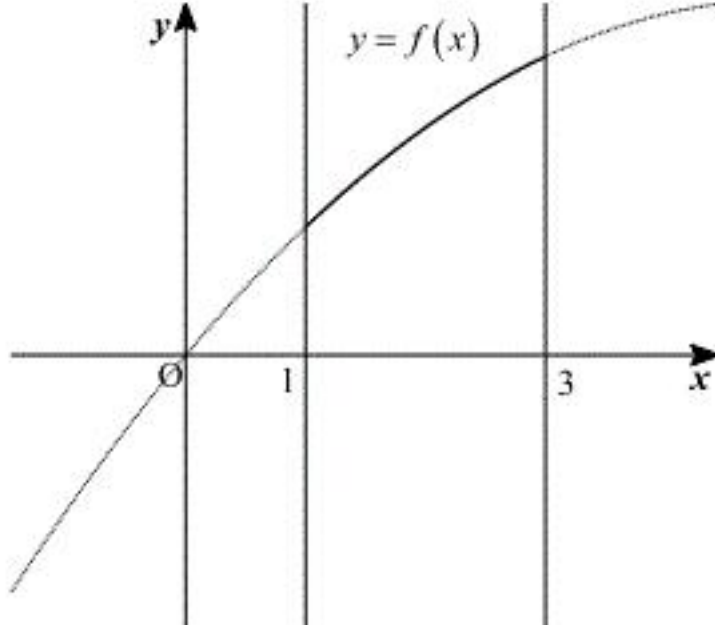
上図より、このときの最大値は $f\left(\frac{1}{2a}\right)$ 、最小値は $f(1)$ である。①より、 $0 \leq x \leq 1$ の区間

と合わせると、

$$M(a) = f\left(\frac{1}{2a}\right), m(a) = f(1)$$

となる。

- [4] $3 \leq \frac{1}{2a} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \geq a > 0$ のとき



上図より、このときの最大値は $f(3)$ 、最小値は $f(1)$ である。ここで、 $f(0)$ と $f(3)$ の大小

関係について、

$$\begin{aligned} f(0) &< f(3) \\ \Leftrightarrow 1 &< -9a + 3 \\ \therefore a &< \frac{2}{9} \end{aligned}$$

より、 $a < \frac{2}{9}$ のとき $f(3)$ の方が大きく、 $a \geq \frac{2}{9}$ のとき $f(0)$ の方が大きくなる。よって、

$0 \leq x \leq 1$ の区間と合わせると、

$$M(a) = f(3), m(a) = f(1)$$

となる。これは、 $a = 0$ のときにも成り立つ。

以上、[1]から[4]の結果をまとめると下表のようになる。

区間	$M(a)$	$m(a)$
$0 \leq a \leq \frac{1}{6}$	$f(3)$	$f(1)$
$\frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{2a}\right)$	$f(1)$
$\frac{1}{4} < a$	$f(0)$	$f(3)$

ここで、

$$\begin{aligned} f(3) - f(1) &= (-9a + 3) - (-a + 1) \\ &= -8a + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2a}\right) - f(1) &= \frac{1}{4a} - (-a + 1) \\ &= \frac{4a^2 - 4a + 1}{4a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) - f(3) &= 1 - (-9a + 3) \\ &= 9a - 2 \end{aligned}$$

となるから、 $M(a) - m(a)$ は

$$\begin{cases} -8a + 2 & (0 \leq a \leq \frac{1}{6}) \\ \frac{4a^2 - 4a + 1}{4a} & (\frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{4}) \\ 9a - 2 & (\frac{1}{4} < a) \end{cases}$$

となる。

- (2)

(1)より、 $M(a) - m(a)$ は、 $0 \leq a \leq \frac{1}{6}$ では単調減少、 $\frac{1}{4} < a$ では単調増加する。また、

$\frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{4}$ のときは、

$$\begin{aligned} G(a) &= M(a) - m(a) \\ &= \frac{1}{4a} + a - 1 \end{aligned}$$

とおくと、

$$G'(a) = 1 - \frac{1}{4a^2}$$

となり、 $\frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{4}$ において常に負である。よって、 $M(a) - m(a)$ は、 $\frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{4}$ のときも単

調減少する。よって、 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ で単調減少、 $\frac{1}{4} < a$ で単調増加より、 $M(a) - m(a)$ は $a = \frac{1}{4}$ の

とき、最小値

$$M\left(\frac{1}{4}\right) - m\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

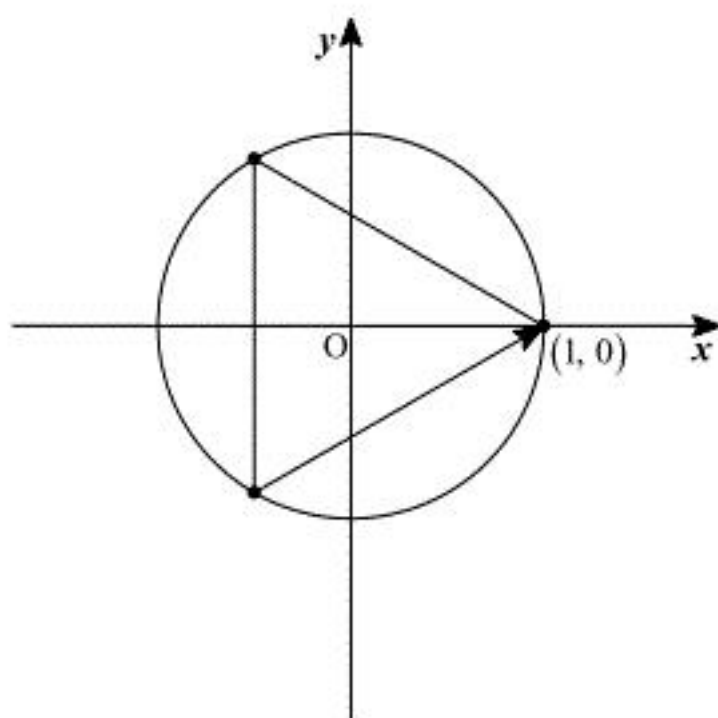
をとる。

〔解答〕

- (1) $\boxed{\Delta}$ -1 $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\text{モ}}$ 3 $\boxed{\text{ヤ}}$ 2
 (2) $\boxed{\text{ユ}}$ 2 $\boxed{\text{ヨ}}$ 5 $\boxed{\text{ラ}}$ 4 $\boxed{\text{リ}}$ 5 $\boxed{\text{ル}}$ -1
 $\boxed{\text{レ}}$ 5 $\boxed{\text{ロ}}$ 4
 (3) $\boxed{\text{ワ}}$ 6 $\boxed{\text{ヲ}}$ 7
 (4) $\boxed{\text{あ}}$ (f) $\boxed{\text{い}}$ (e) $\boxed{\text{う}}$ (c)
 (5) $\boxed{\text{シ}}$ 8

〔解説〕

(1)



光が鏡で2回反射されて初めて(1, 0)に戻るとき, 上図のように正三角形となる。よって, 鏡の1点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に向かって光を発せばよい。

(2)

光が鏡で4回反射されて初めて(1, 0)に戻るとき, (4)の(b), (d)の2通りの経路がある。(d)の経路をとるときが θ_1 , (b)の経路をとるときが θ_2 である。よって, 図より

$$\theta_1 = \frac{2}{5}\pi, \theta_2 = \frac{4}{5}\pi$$

である。

次に $\cos \theta_1$ を求める。 $\varphi = \frac{\pi}{5}$ とおくと, $\theta_1 = 2\varphi$ であり, また $2\varphi + 3\varphi = \pi$ であることから,

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi &= \sin(\pi - 2\varphi) = \sin 3\varphi \\ \Leftrightarrow 2\sin \varphi \cos \varphi &= 3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi \quad (3 \text{ 倍角の公式}) \\ \Leftrightarrow 2\cos \varphi &= 3 - 4\sin^2 \varphi \quad (\because \sin \varphi \neq 0) \\ \Leftrightarrow 2\cos \varphi &= -1 + 4\cos^2 \varphi \\ \Leftrightarrow \cos \varphi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

がいえる。したがって,

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \cos 2\varphi \\ &= 2\cos^2 \varphi - 1 \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

である。

(3)(4)

光が鏡で6回反射されて初めて(1, 0)に戻るとき, 光の経路は3通り存在する。Aの場合は(f), Bの場合は(e), Cの場合は(c)である。よって,

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \frac{2\pi}{7} \cdot 3 \\ &= \frac{6}{7}\pi \end{aligned}$$

となる。

(5)

光が鏡で31回反射されて初めて(1, 0)に戻るときは, 正32角形を考えればよい。この正32角形のある頂点から, 原点を中心として反時計まわりに k 個離れた点に光が移動するという動作を L_k とする。このとき, y 軸よりも上に存在する頂点の数は15個より $0 \leq k \leq 15$ である。(1, 0)から L_k をくりかえして行き, ちょうど32回で初めて(1, 0)に光が戻ってくればよい。したがって, k に1, 2, 3, ..., 32を1から順にかけていったとき, k に32をかけたとき初めて $32k$ が32の倍数となればよい。したがって k と32が互いに素であればよいから, k は15以下の奇数であればよい。このような k は8個ある。