

1

〔解答〕

(1)

ア 961 イ 7 ウ 9

(2)(i)

エ 17 オ 3

(ii)(a)

カ -1 キ -9

(b)

ク 1 ケ -4

〔解説〕

(1)

 3^{2014} が n 桁の数であるとする

$$10^{n-1} \leq 3^{2014} < 10^n$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq 2014 \log_{10} 3 < n$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq 960.8794 < n$$

$$\therefore n = 961$$

となる。よって、 3^{2014} は 961 桁の数である。また、最も大きい位の数字を x とすると

$$x \cdot 10^{960} \leq 3^{2014} < (x+1) \cdot 10^{960}$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} x + 960 \leq 960.8794 < \log_{10} (x+1) + 960$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} x \leq 0.8794 < \log_{10} (x+1) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $x=7$ とすると

$$\log_{10} 7 = 0.8451$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 8 &= 3 \log_{10} 2 \\ &= 0.9030 \end{aligned}$$

となるので、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。よって $x=7$ となり、最も大きい位の数字は 7 である。また、 $3^1=3, 3^2=9, 3^3=27, 3^4=81, 3^5=243$ より、3 の累乗の 1 の位は 3, 9, 7, 1 の繰り返しになる。よって $2014=4 \cdot 503+2$ より、 3^{2014} の 1 の位は 9 となる。

(2)

(i)

まず、方程式 $-2x^2-8x-3=|3x+6|$ を解く。[1] $x \geq -2$ のとき、

$$-2x^2-8x-3=3x+6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+11x+9=0$$

$$\Leftrightarrow (2x+9)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 (\because x \geq -2)$$

となる。

[2] $x < -2$ のとき、

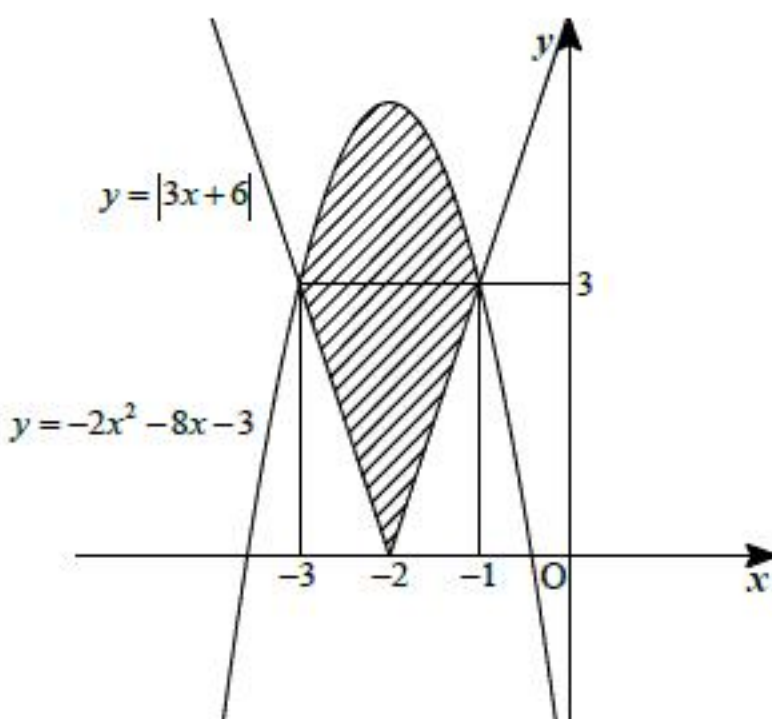
$$-2x^2-8x-3=-(3x+6)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+3)=0$$

$$\therefore x=-3 (\because x < -2)$$

となる。

以上より、 $y=-2x^2-8x-3, y=|3x+6|$ の交点の x 座標は $x=-1, -3$ となる。よって、 D は下図の斜線部分となる(境界上の点を含む)。上図より、対称性から D の面積は

$$\begin{aligned} 2 \int_{-2}^{-1} \{(-2x^2-8x-3)-(3x+6)\} dx &= 2 \int_{-2}^{-1} (-2x^2-11x-9) dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 9x \right]_{-2}^{-1} \\ &= \frac{17}{3} \end{aligned}$$

となる。

(ii)(a)

 $4x+y=k$ とすると $y=-4x+k$ となり、これは傾き -4 、 y 切片 k の直線を表す。直線 $y=-4x+k$ が領域 D と共有点を持つような k の最大値、最小値を求めればよい。 k が最大となるのは、 $y=-4x+k$ が $y=-2x^2-8x-3$ に接するときで、このとき

$$-4x+k=-2x^2-8x-3$$

$$\therefore 2x^2+4x+k+3=0$$

が重解を持つ。よって

$$2^2-2(k+3)=0$$

$$\therefore k=-1$$

となる。したがって、 k の最大値は -1 である。また、 k が最小となるのは、 $y=-4x+k$ が $(-3, 3)$ を通るときなので

$$3=-4 \cdot (-3)+k$$

$$\therefore k=-9$$

となる。よって、 k の最小値は -9 である。

(b)

 $x^2+4x+y=l$ とすると

$$y=-x^2-4x+l$$

$$=-(x+2)^2+l+4$$

となり、これは頂点が $(-2, l+4)$ で上に凸の放物線を表す。曲線 $y=-x^2-4x+l$ が領域 D と共有点を持つような l の最大値、最小値を求めればよい。 l が最大となるのは、 $y=-x^2-4x+l$ が $y=-2x^2-8x-3$ に接するときで、このとき

$$-x^2-4x+l=-2x^2-8x-3$$

$$\therefore x^2+4x+l+3=0$$

が重解を持つ。よって

$$2^2-(l+3)=0$$

$$\therefore l=1$$

となる。したがって、 l の最大値は 1 である。また、 l が最小となるのは、 $y=-x^2-4x+l$ が点 $(-2, 0)$ を通るときなので

$$0=-(-2)^2-4 \cdot (-2)+l$$

$$\therefore l=-4$$

となる。したがって、 l の最小値は -4 である。

【解答】

コ 1	サ 4	シ 3	ス 3
セ 6	ソ 2	タ -15	チ 5
ツ -12	テ -4	ト -6	ナ -12
ニ 6	ヌ 4	ネ 5	ノ 15

【解説】

$B(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ とおく。

(1)

H は ℓ ，すなわち直線 OB 上の点であるから，

$$\cos \angle AOH = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= (\sqrt{3}+3) \cdot 1 + (3\sqrt{3}+3) \cdot \sqrt{3} + (6-2\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3} \\ &= 16\sqrt{3}, \\ |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{(3+\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3}+3)^2 + (6-2\sqrt{3})^2} \\ &= 4\sqrt{6}, \\ |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

となるので，

$$\cos \angle AOH = \frac{16\sqrt{3}}{4\sqrt{6} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \angle AOH = \frac{1}{4}\pi$$

となる。

(2)

OH と AH は直交しているから， $\triangle AOH$ において，

$$OH = OA \cos \frac{\pi}{4} = 4\sqrt{3}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \frac{|\overrightarrow{OH}|}{|\overrightarrow{OB}|} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{4} \cdot (1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}) \\ &= (\sqrt{3}, 3, 6)\end{aligned}$$

$$H(\sqrt{3}, 3, 6)$$

と求まる。

(3)

$P(\sqrt{3}, y, z)$ を C の底面上の点とすれば， $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{HP}$ が直交していることから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{HP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3}, 3, 6) \cdot (0, y-3, z-6) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(y-3) + 6(z-6) &= 0 \\ \therefore y + 2z - 15 &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

(4)

$Q(\sqrt{3}, y, z)$ を C の側面上の点とする。(1)の結果より， $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が常に $\frac{\pi}{4}$ となることから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OH}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow 3 + 3y + 6z &= \sqrt{3 + y^2 + z^2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となる。両辺ともに正であるから，2乗して

$$\begin{aligned}9(1+y+2z)^2 &= 24(3+y^2+z^2) \\ \Leftrightarrow 5y^2 - 12yz - 4z^2 - 6y - 12z + 21 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。

また， z 座標が最大となるのは， Q が C の底面の円周上にあるときであるから，(3)の $y = -2z + 15$ を①に代入して，

$$\begin{aligned}5(-2z+15)^2 - 12(-2z+15)z - 4z^2 - 6(-2z+15) - 12z + 21 &= 0 \\ \Leftrightarrow 40z^2 - 480z + 1056 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5z^2 - 60z + 132 &= 0 \\ \therefore z &= \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 5 \cdot 132}}{5} = 6 \pm \frac{4}{5}\sqrt{15}\end{aligned}$$

となることから，求める最大値は $6 + \frac{4}{5}\sqrt{15}$ である。

【解答】

- (1) ハ 1 ヒ 30
 (2) フ 7 ヘ 10
 (3) ホ -1 マ 1 ミ 30
 (4) ム 2 メ 3 モ 1 ヤ 30
 (5) ユ -1 ヨ 10 ラ 2 リ 3 ル 1 レ 10

【解説】

(1)

1回の操作の後で一番左のカードが10となるには、10とはじめに一番左にある1が選ばれている必要があるので、このときに選ばれたカードを1, a , 10とする。 a は2から9までの自然数であるから、 a の選び方は8通りである。

ここで、いずれのカードも元の位置と異なるような置き方は、1, a , 10それぞれを、操作の前に10, 1, a があった位置に置く置き方と a , 10, 1があった位置に置く置き方の2通りがあるから、求める確率は

$$P_1 = \frac{8}{{}_{10}C_3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$$

である。

(2)

n 回の操作の後で一番左のカードが10であるとき、 $n+1$ 回目の操作の後も一番左のカードが10となるのは、 $n+1$ 回目で10が選ばれなかったときである。よって求める確率は

$$\frac{{}_9C_3}{{}_{10}C_3} P_n = \frac{7}{10} P_n$$

である。

(3)

n 回の操作の後で一番左のカードが10でない確率が $1-P_n$ であることに注意すると、(1)と同様に考えて求める確率は

$$\frac{1}{30}(1-P_n) = \frac{-P_n+1}{30}$$

となる。

(4)

(2)と(3)の結果より、

$$P_{n+1} = \frac{7}{10} P_n + \frac{-P_n+1}{30} = \frac{2}{3} P_n + \frac{1}{30}$$

となる。

(5)

(4)の結果より、

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{2}{3} P_n + \frac{1}{30} \\ \Leftrightarrow P_{n+1} - \frac{1}{10} &= \frac{2}{3} \left(P_n - \frac{1}{10} \right) \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\left\{ P_n - \frac{1}{10} \right\}$ は、初項 $P_1 - \frac{1}{10} = -\frac{1}{15}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} P_n - \frac{1}{10} &= -\frac{1}{15} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\ \therefore P_n &= -\frac{1}{15} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

となる。