

〔解答〕

- | | | | |
|-----|------|-----|------|
| (1) | ア -1 | イ 1 | ウ 1 |
| (2) | エ -1 | オ 4 | カ 2 |
| | キ -1 | ク 2 | ケ -1 |
| | コ -1 | サ 2 | シ -1 |
| | ス 2 | セ 1 | ソ 4 |

〔解説〕

(1)

 $t = -\sin x + \cos x$ とおくと,

$$\begin{aligned} t^2 &= (-\sin x + \cos x)^2 \\ &= \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= 1 - \sin 2x \end{aligned}$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sin 2x - \sin x + \cos x \\ &= a(1 - t^2) + t \\ &= -at^2 + t + a \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)で求めた式を

$$g(t) = -at^2 + t + a$$

とおくと, $a < 0$ であるから, $s = g(t)$ は座標平面上で下に凸な放物線を表す。この2次関数を平方完成すると,

$$g(t) = -a \left(t - \frac{1}{2a} \right)^2 + a + \frac{1}{4a}$$

となり, ここで, 三角関数の合成を行うことにより,

$$\begin{aligned} t &= -\sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) \\ &= -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

となるから, t の動く範囲は $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ となることがわかる。よって, この区間と放物線の軸: $t = \frac{1}{2a}$ との位置関係に注意して場合分けをすることで, 関数 $g(t)$ の最大値と最小値を求めることにする。

[1] $\frac{1}{2a} < -\sqrt{2}$, すなわち, $-\frac{\sqrt{2}}{4} < a < 0$ のとき放物線の軸: $t = \frac{1}{2a}$ は区間 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ に含まれないから,

$$t = \sqrt{2} \text{ のとき最大値 } -a \cdot (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} + a = -a + \sqrt{2}$$

$$t = -\sqrt{2} \text{ のとき最小値 } -a \cdot (-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2}) + a = -a - \sqrt{2}$$

をとる。

[2] $-\sqrt{2} \leq \frac{1}{2a} (< 0)$, すなわち, $a \leq -\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき区間 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ の, 特に $-\sqrt{2} \leq t \leq 0$ の部分に放物線の軸: $t = \frac{1}{2a}$ があるから,

$$t = \sqrt{2} \text{ のとき最大値 } -a \cdot (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} + a = -a + \sqrt{2}$$

$$t = \frac{1}{2a} \text{ のとき最小値 } a + \frac{1}{4a}$$

をとる。

以上, [1], [2]より, $g(t) = f(x)$ の最大値, 最小値は以下のようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{2}}{4} < a < 0 \text{ のとき} & \begin{cases} \text{最大値: } -a + \sqrt{2} \\ \text{最小値: } -a - \sqrt{2} \end{cases} \\ a \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ のとき} & \begin{cases} \text{最大値: } -a + \sqrt{2} \\ \text{最小値: } a + \frac{1}{4a} \end{cases} \end{aligned}$$

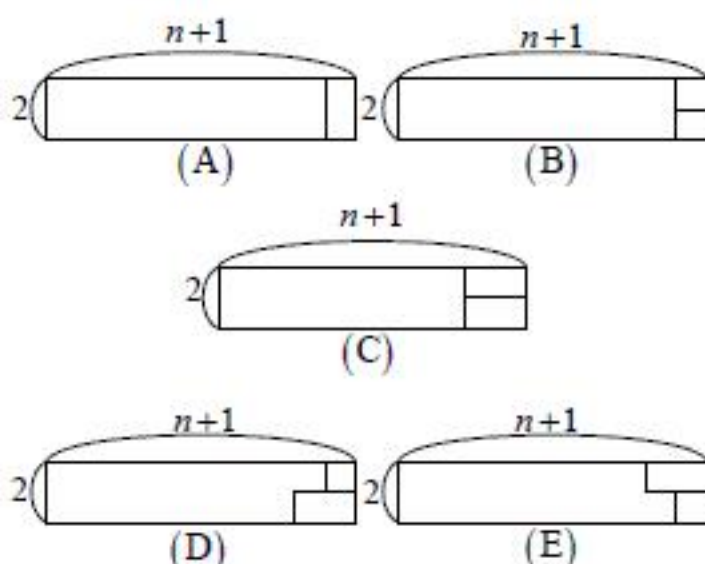
【解答】

- (1) タ 22 チ 10 ツ 10
 (2) テ 1 ト 2 ナ 1
 ニ 2 ヌ 1 ネ 1
 ノ 3 ハ 1 ヒ -1
 フ 3 ヘ 1 ホ -1
 (3) マ 71

【解説】

(1) (2)

まず、一辺の長さが1の正方形のタイルと、辺の長さが1と2の長方形のタイルの2種類のタイルを並べて、縦の長さ2、横の長さ $n+1$ ($n \geq 2$)の長方形を形作ることを考える。このときのタイルの並べ方の総数を、右端のタイルの並べ方によって、以下の5通りの方法に場合分けして考えることにする。



(A)の場合は、右端のタイルの置き方は1通りであり、それ以外のタイルの置き方は、題意より a_n 通りであるから、

$$1 \cdot a_n = a_n \text{ (通り)}$$

である。同様にして、

(B)の場合は、 a_n (通り)

(C)の場合は、 a_{n-1} (通り)

(D)の場合は、 b_n (通り)

(E)の場合は、 c_n (通り)

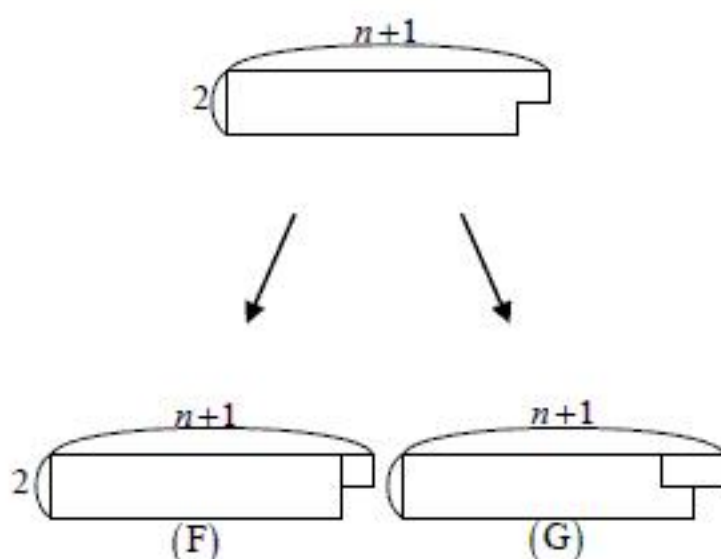
であることがわかるから、したがって

$$a_{n+1} = a_n + a_n + a_{n-1} + b_n + c_n$$

と表せることがわかる。ここで、対称性によって、任意の自然数 n で $b_n = c_n$ となるから、

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} + 2b_n \quad \cdots \text{①}$$

となる。また、同様に考えると、以下のような図形($n \geq 1$)はその下の2通りの方法に場合分けされ、



(F)の場合は a_n 通りであり、(G)の場合は c_n 通りであるから、

$$b_{n+1} = a_n + c_n$$

$$\therefore b_{n+1} = a_n + b_n \quad \cdots \text{②}$$

となる。よって、特に $n=2$ のとき、①、②より、

$$\begin{cases} a_3 = 2a_2 + a_1 + 2b_2 \\ b_3 = a_2 + b_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 2 \cdot 7 + 2 + 2 \cdot 3 \\ b_3 = 7 + 3 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} a_3 = 22 \\ b_3 = 10 (= c_3) \end{cases}$$

と求まる。さらに、 $n \geq 2$ のとき、②を変形して①に代入することによって、

$$\begin{aligned} b_{n+2} - b_{n+1} &= 2(b_{n+1} - b_n) + (b_n - b_{n-1}) + 2b_n \\ \therefore b_{n+2} &= 3b_{n+1} + b_n - b_{n-1} \quad \cdots \text{③} \end{aligned}$$

となり、③より

$$\begin{cases} b_{n+3} = 3b_{n+2} + b_{n+1} - b_n \\ b_{n+2} = 3b_{n+1} + b_n - b_{n-1} \end{cases}$$

となるから、1つ目の式から2つ目の式を引くことによって、②より

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n - a_{n-1}$$

と求まる。

(3)

(2)で求めた漸化式より、

$$\begin{aligned} a_4 &= 3a_3 + a_2 - a_1 \\ &= 3 \cdot 22 + 7 - 2 \\ &= 71 \end{aligned}$$

と求まる。

【解答】

- (1) ミ 1 ム -13 メ 2
 (2) モ 13 ヤ 3 ュ 0 ヨ 91 ラ 6 リ 12
 (3) ル 6 レ 2 ロ 3 ワ 22 ヲ 3

【解説】

(1)

放物線 $C_1: y = f(x)$ は原点 O を頂点とした下に凸の放物線であるから、定数 $a > 0$ を用いて

$$f(x) = ax^2$$

とおける。 C_1 が点 $P(m, n)$ を通ることから、

$$f(m) = n$$

$$\Leftrightarrow am^2 = n$$

$$\therefore a = \frac{n}{m^2} (> 0)$$

を得る。よって、 $f(x) = \frac{n}{m^2}x^2$ である。また、放物線 $C_2: y = g(x)$ は点 $\left(0, \frac{13}{2}\right)$ を頂点とした上

に凸の放物線であるから、定数 $b < 0$ を用いて

$$g(x) = bx^2 + \frac{13}{2}$$

とおける。 $g(m) = n$ より

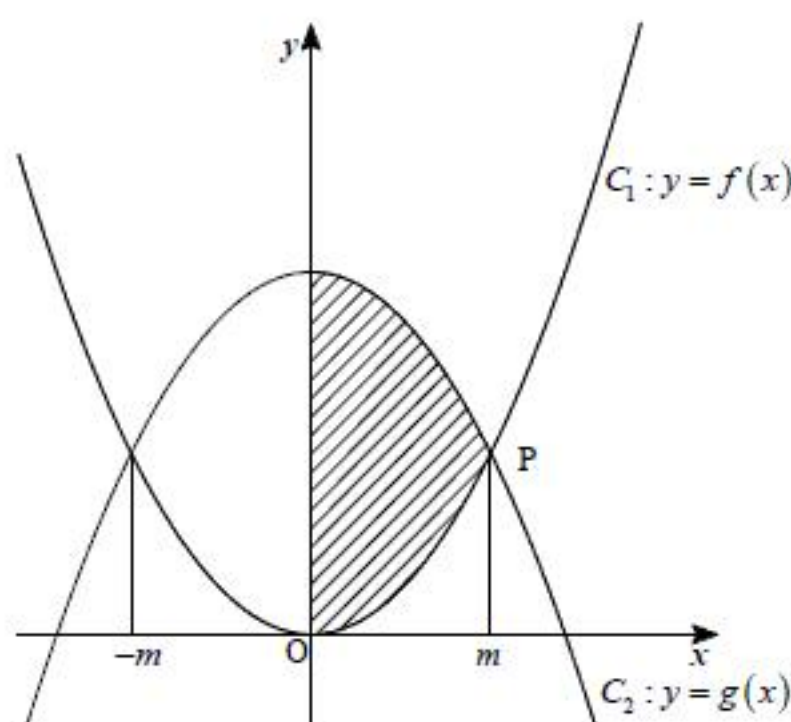
$$bm^2 + \frac{13}{2} = n$$

$$\therefore b = \frac{1}{m^2} \left(n - \frac{13}{2} \right) (< 0)$$

を得る。よって、 $g(x) = \frac{1}{m^2} \left(n + \frac{-13}{2} \right) x^2 + \frac{13}{2}$ である。

(2)

$x \geq 0$ の範囲で、放物線 C_1, C_2 および y 軸で囲まれた領域を xy 平面上に図示すると、以下の図の斜線部のようになる。



この2つの放物線はどちらも点 $P(m, n)$ を通り、 y 軸対称であることに注意すると、斜線部の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-m}^m \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{13}{2m^2} \int_{-m}^m -(x+m)(x-m) dx \right\} \\ &= \frac{13}{4m^2} \cdot \frac{1}{6} \{m - (-m)\}^3 \\ &= \frac{13}{3} m \end{aligned}$$

と求まる。したがって、 S の期待値は

$$\begin{aligned} \frac{13}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{13}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{13}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{13}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} + \frac{13}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} + \frac{13}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} &= \frac{13}{18} (1+2+3+4+5+6) \\ &= \frac{91}{6} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$10 \leq S \leq 20$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq \frac{13}{3} m \leq 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{30}{13} \leq m \leq \frac{60}{13}$$

を満たす (m, n) の組合せは、 m は 3, 4 のいずれかの 2 通りで、 n は 6 通りあるから、

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ 通り}$$

である。

(3)

(1) で求めた 2 次関数をそれぞれ微分すると、

$$f'(x) = \frac{2n}{m^2}x, g'(x) = \frac{1}{m^2}(2n-13)x$$

となるから、 C_1, C_2 の点 P における接線 ℓ_1, ℓ_2 の傾きはそれぞれ

$$f'(m) = \frac{2n}{m}, g'(m) = \frac{2n-13}{m}$$

となる。よって、 ℓ_1, ℓ_2 が垂直に交わるのは、条件

$$\begin{aligned} \frac{2n}{m} \cdot \frac{2n-13}{m} &= -1 \\ \Leftrightarrow 4n^2 - 26n + m^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4m^2}}{4} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たすときだが、ここで①より、 n が自然数となるためには

$$\sqrt{169 - 4m^2}$$

が整数となることが必要であり、 $m = 1, 2, \dots, 6$ を順々に代入していくことにより、

$$m = 6$$

のみが候補となることがわかる。また、逆に①に $m = 6$ を代入することによって、

$$n = \frac{9}{2}, 2$$

となるから、求める (m, n) は $(m, n) = (6, 2)$ であることがわかる。このとき、接線 ℓ_1 の式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \cdot 2}{6}(x-6) + 2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2}{3}x - 2 \end{aligned}$$

であるから、 ℓ_1 と x 軸との交点の x 座標は $x = 3$ であり、また、接線 ℓ_2 の式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \cdot 2 - 13}{6}(x-6) + 2 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{2}x + 11 \end{aligned}$$

であるから、 ℓ_2 と x 軸との交点の x 座標は $x = \frac{22}{3}$ である。