

1

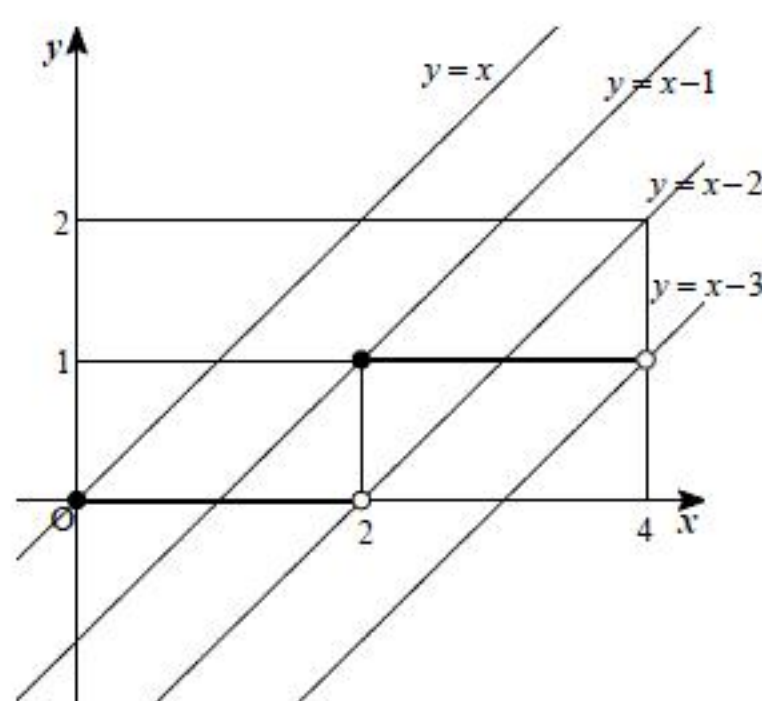
〔解答〕

ア 1 イ 2 ウ 4 エ 30 オ -7
カ 3 キ -1 ク 3 ケ 7

〔解説〕

(1)

$0 \leq x < 4$ での $y = \left[\frac{1}{2}x\right]$ と $y = x - a$ のグラフの交点を考える。



2つのグラフは上のようになる。これより、 $y = \left[\frac{1}{2}x\right]$ と $y = x - a$ の交点の数は、

$a < 0$ のとき 0 個
 $0 \leq a < 1$ のとき 1 個
 $1 \leq a < 2$ のとき 2 個
 $2 \leq a < 3$ のとき 1 個
 $3 \leq a$ のとき 0 個

となる。したがって、 $\left[\frac{1}{2}x\right] = x - a$ が $0 \leq x < 4$ に異なる 2 実数解をもつための a の範囲は、

$$1 \leq a < 2$$

である。

(2)

$$\frac{1}{4 - \sqrt{11}} = \frac{1}{5}(4 + \sqrt{11})$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sqrt{9} &< \sqrt{11} < \sqrt{\frac{49}{4}} \\ \Leftrightarrow 3 &< \sqrt{11} < \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{5} &< \frac{1}{5}(4 + \sqrt{11}) < \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 1.4 &< \frac{1}{4 - \sqrt{11}} < 1.5 \end{aligned}$$

が成立するので、 $\frac{1}{4 - \sqrt{11}}$ の小数第一位の数字は 4 である。

(3)

$(x^2 + \sqrt{2}y)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r (x^2)^r (\sqrt{2}y)^{6-r} = {}_6C_r (\sqrt{2})^{6-r} x^{2r} y^{6-r} \quad (r=0, 1, \dots, 6)$$

である。 $r=4$ のとき、 $x^8 y^2$ の項を表すので、その係数は

$${}_6C_4 (\sqrt{2})^2 = 30$$

である。

(4)

2 次方程式 $x^2 - (k-1)x + k+2 = 0$ が異なる 2 つの実数解を求める条件は、判別式を D_1 として

$$\begin{aligned} D_1 &= \{-(k-1)\}^2 - 4(k+2) \\ &= k^2 - 6k - 7 \\ &= (k-7)(k+1) > 0 \\ \therefore k &< -1, 7 < k \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。また、2 次方程式 $x^2 - (k+1)x + k^2 - 5 = 0$ が異なる 2 つの実数解を求める条件は、判別式を D_2 として

$$\begin{aligned} D_2 &= \{-(k+1)\}^2 - 4(k^2 - 5) \\ &= -3k^2 + 2k + 21 > 0 \\ \Leftrightarrow 3k^2 - 2k - 21 &< 0 \\ \Leftrightarrow (3k+7)(k-3) &< 0 \\ \therefore -\frac{7}{3} &< k < 3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。よって、与えられた 2 つの 2 次方程式がどちらも異なる 2 つの実数解をもつ条件は、④かつ⑤であるから

$$-\frac{7}{3} < k < -1$$

である。また、与えられた 2 つの 2 次方程式の少なくとも一方が異なる 2 つの実数解をもつ条件は、④または⑤であるから

$$k < 3, 7 < k$$

である。

〔解答〕

コ 2 サ 5 シ 6 ス 5 セ 5 ソ 3 タ 2
チ 5 ツ 2 テ 3 ト 3 ナ 5 ニ 1

〔解説〕

(1)

直線 AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから、

$$BD:DC = AB:AC = 6:4 = 3:2$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、

$$\triangle ABD = \frac{3}{5}S$$

である。また、 $AE:ED = 2:1$ であるから、

$$\triangle ABE = \frac{2}{3} \triangle ABD = \frac{2}{5}S$$

となる。以上より、求める面積比は

$$\triangle ABE : \triangle ABC = \frac{2}{5}S : S = 2:5$$

である。

(2)

$\triangle ADC$ と直線 BF について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{FC}{AF} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{FC}{AF} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore AF:FC = 6:5$$

となる。

(3)

$\triangle ABE$ の面積が $\frac{8}{5}\sqrt{5}$ であるとき、(1)より、 $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\frac{2}{5}S = \frac{8}{5}\sqrt{5} \quad \therefore S = 4\sqrt{5}$$

となる。よって、

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin \angle BAC = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

である。 $\angle BAC$ が鋭角であることから、 $\cos \angle BAC > 0$ であるから、

$$\cos \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

となる。したがって、 $\triangle ABC$ において余弦定理により

$$\begin{aligned} BC^2 &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{5}$$

である。また、 $\triangle ABC$ で正弦定理により

$$\frac{4}{\sin \angle ABC} = \frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \therefore \sin \angle ABC = \frac{2}{3}$$

となる。 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、 $\triangle ABC$ で正弦定理により

$$\frac{4}{\frac{2}{3}} = 2R \quad \therefore R = 3$$

である。また、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおくと、

$$S = \frac{1}{2}r(6+4+2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore r = \frac{4\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$$

である。

3

〔解答〕

ヌ 256 ネ 64 ノ 52 ハ 66 ヒ 85 フ 64

〔解説〕

(1)

整数 x は全部で $4^4 = 256$ 個できる。

(2)

組 (a, d) の選び方が 4 通りあり、その組それぞれに対し、組 (b, c) の選び方が $4^2 = 16$ 通りあるので、 $a = d$ となる x は全部で $4 \cdot 16 = 64$ 個できる。

(3)

a, b, c, d のうち、

[1] 4 個とも同じ数字になる場合

このような x は 4 個できる。

[2] 3 個同じ数字になる場合

3 個同じ数字の選び方が 4 通りあり、その数字それぞれに対し、残りの 1 個の数字の選び方が 3 通りあり、更に a, b, c, d のうちどれが 1 個の数字になるかが 4 通りある。よって、このような x は $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ 個できる。

以上より、求める個数は $4 + 48 = 52$ 個である。

(4)

$a + b + c + d$ が 12 以上となるとき、 $a + b + c + d = 12, 13, 14, 15, 16$ のいずれかとなる。

[1] $a + b + c + d = 12$ のとき

数字の組合せ	場合の数
(1, 3, 4, 4)	$\frac{4!}{2!}$
(2, 2, 4, 4)	$\frac{4!}{2!2!}$
(2, 3, 3, 4)	$\frac{4!}{2!}$
(3, 3, 3, 3)	1

[2] $a + b + c + d = 13$ のとき

数字の組合せ	場合の数
(1, 4, 4, 4)	4
(2, 3, 4, 4)	$\frac{4!}{2!}$
(3, 3, 3, 4)	4

[3] $a + b + c + d = 14$ のとき

数字の組合せ	場合の数
(2, 4, 4, 4)	4
(3, 3, 4, 4)	$\frac{4!}{2!2!}$

[4] $a + b + c + d = 15$ のとき

数字の組合せ	場合の数
(3, 4, 4, 4)	4

[4] $a + b + c + d = 16$ のとき

数字の組合せ	場合の数
(4, 4, 4, 4)	1

以上より、求める個数は

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + \frac{4!}{2!} \cdot 3 + \frac{4!}{2!2!} \cdot 2 = 66 \text{ 個}$$

である。

(5)

$$x = 1000a + 100b + 10c + d = 3(333a + 33b + 3c) + a + b + c + d \text{ が } 3 \text{ の倍数}$$

$$\Leftrightarrow a + b + c + d \text{ が } 3 \text{ の倍数}$$

より、 $a + b + c + d = 6, 9, 12, 15$ となる場合の数を調べればよい。 $a + b + c + d = 12, 15$ のときには(4)で調べたので、6, 9 のときについて考える。

[1] $a + b + c + d = 6$ のとき

数字の組合せ	場合の数
(1, 1, 1, 3)	4
(1, 1, 2, 2)	$\frac{4!}{2!2!}$

[2] $a + b + c + d = 9$ のとき

数字の組合せ	場合の数
(1, 1, 3, 4)	$\frac{4!}{2!}$
(1, 2, 2, 4)	$\frac{4!}{2!}$
(1, 2, 3, 3)	$\frac{4!}{2!}$
(2, 2, 2, 3)	4

以上より、求める個数は

$$1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + \frac{4!}{2!} \cdot 5 + \frac{4!}{2!2!} \cdot 2 = 85 \text{ 個}$$

である。次に、

$$x = 1000a + 100b + 10c + d = 4(250a + 25b) + 10c + d \text{ が } 4 \text{ の倍数}$$

$$\Leftrightarrow 10c + d \text{ が } 4 \text{ の倍数}$$

である。 $10c + d$ が 4 の倍数となるような (c, d) は

$$(c, d) = (1, 2), (3, 2), (2, 4), (4, 4)$$

の 4 組あり、これらの組それぞれに対し、組 (a, b) の選び方が $4^2 = 16$ 通りあるので、求める個数は

$$4 \cdot 16 = 64 \text{ 個}$$

である。