

1

【解答】

- (1) ア 2 イ 16 ウ 32
(2) あ $(d), (h)$
(3) エ 9 オ 12 カ 70

【解説】

- (1)
公比を r (r は正の実数) とする。
(i)

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= 18 \\ \Leftrightarrow a_1 + a_1 r^3 &= 18 \\ \Leftrightarrow a_1 &= \frac{18}{1+r^3} \end{aligned}$$

- である。
[1] $r=1$ のとき
このとき、 $a_1=9$ となり、 a_1 は正の整数となる。
[2] $r=2$ のとき
このとき、 $a_1=2$ となり、 a_1 は正の整数となる。
[3] $r \geq 3$ のとき
このとき、 $a_1 \leq 1$ となり、 a_1 は正の整数とならない。

以上、[1], [2], [3] より、最小のものは $a_1=2$ である。

(ii)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_1 r^k$$

となる。これが収束するので、 $0 < r < 1$ である。よって

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= 18 \\ \Leftrightarrow r^3 &= \frac{18}{a_1} - 1 \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{18}{a_1} - 1 < 1 \quad (\because 0 < r^3 < 1) \\ \Leftrightarrow 1 < \frac{18}{a_1} < 2 \\ \therefore a_1 &= 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 \end{aligned}$$

である。よって、

$$r^3 = \frac{18}{a_1} - 1$$

に再び a_1 の値を代入して、整理すると下表のようになる。

a_1	10	11	12	13	14	15	16	17
r^3	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{17}$

よって、 r が有理数となるのは $a_1=16$ のときであり、このとき $r=\frac{1}{2}$ である。また、このとき

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_1 r^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 (1-r^{n+1})}{1-r} \\ &= \frac{a_1}{1-r} \\ &= \frac{16}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 32 \end{aligned}$$

となる。

(2)

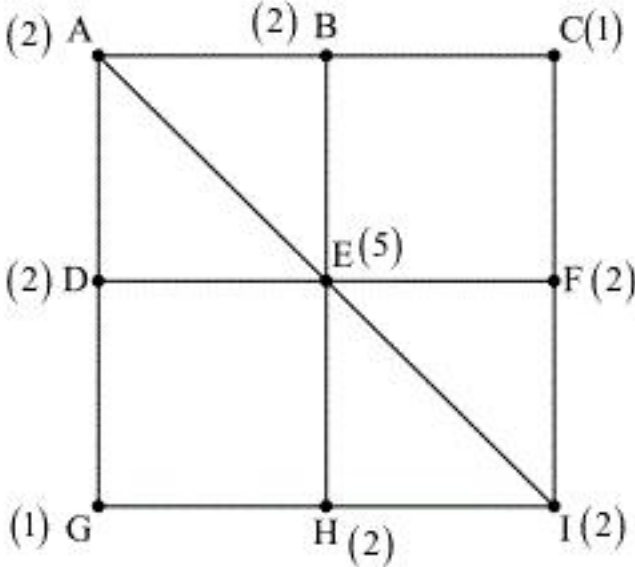
- 命題 P は、数学的に詳しく書くと
P: すべての実数 x について、「 $x \geq 3$ ならば $f(x) < 2$ 」である
となるから、この命題の否定をとると
 $\bar{P}$: ある実数 x で、「 $x \geq 3$ かつ $f(x) < 2$ でない」ものが存在する
 $\Leftrightarrow \bar{P}'$: ある実数 x で、「 $x \geq 3$ かつ $f(x) \geq 2$ である」ものが存在する

となる。上の命題中の文字 x は何でもよいことに注意すると、問題の選択肢の中で

$(d), (h)$

が命題 P の否定を表していることがわかる。

(3)



上図で、() 内の数字は、それぞれの点に辿り着いた後、取れる進路の数を表している。例えば、A を出発して、 $A \rightarrow D$ と進路を進めば、次の進路は E, G の 2 通りである。

- (i)
A を出発したあと、B, D, E のどれかに進むので、それぞれの () 内の数字を足して、全部で 9 通りとなる。
(ii)
E を出発したあと、A, B, D, F, H, I のどれかに進むので、それぞれの () 内の数字を足して、全部で 12 通りとなる。
(iii)
同様にして、出発点が B なら 8 通り、C なら 4 通り、D なら 8 通り、F なら 8 通り、G なら 4 通り、H なら 8 通り、I なら 9 通りとなるので、全部で、
 $9 \times 2 + 8 \times 4 + 4 \times 2 + 12 \times 1 = 70$ 通り
となる。

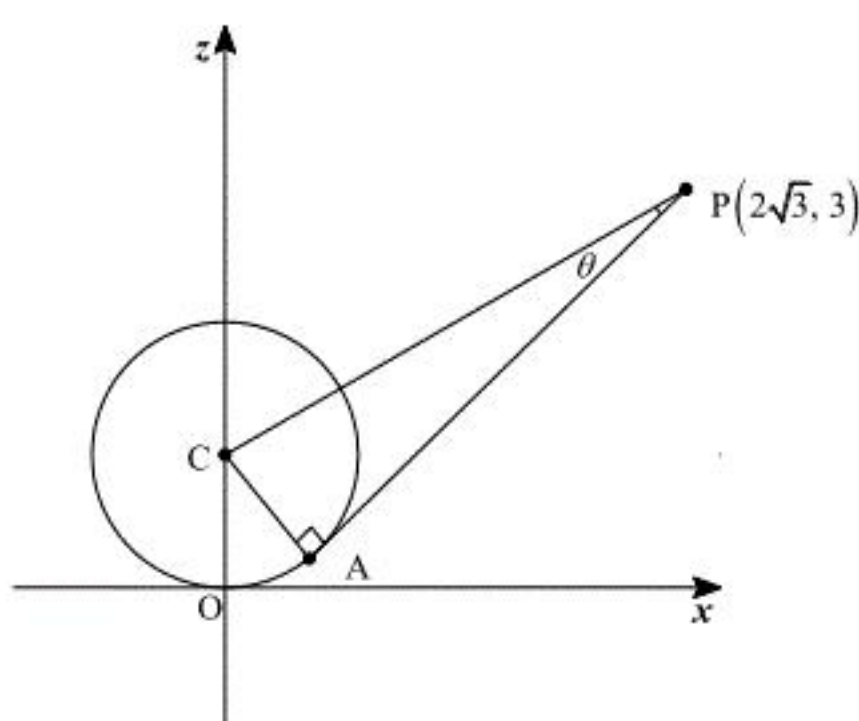
2

【解答】

- (1) 15 1 4
 (2) 3 8 0 9 8
 15 4
 (3) 2 15

【解説】

(1)



上図のように、 zx 平面で考える。三角形 CPA は直角三角形であり、球の半径は 1 なので

$$CA = 1$$

$$CP^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3-1)^2$$

$$\therefore CP = 4$$

となる。よって、三平方の定理より、

$$PA^2 = CP^2 - CA^2$$

$$\Leftrightarrow PA^2 = 16 - 1$$

$$\therefore PA = \sqrt{15}$$

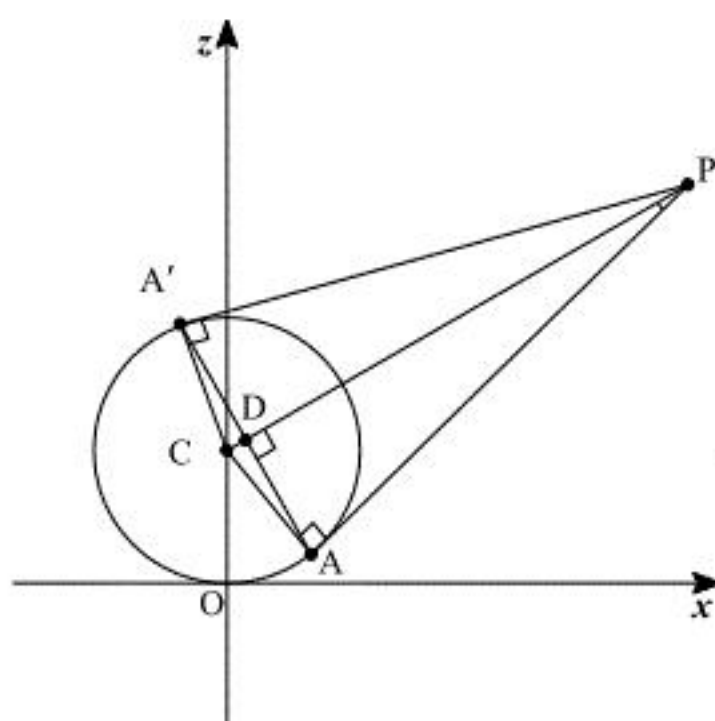
となる。また、正弦定理より

$$\frac{CA}{\sin \theta} = \frac{CP}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{4}$$

となる。

(2)



(1)と同様に、 zx 平面で考える。球面 S 上で光が当たる部分と影の部分との境界は、点 D を中心とする、半径が線分 AD の長さとなる円である。ここで、

$$\text{三角形 CPA} \sim \text{三角形 CAD}$$

より、

$$CP : PA = CA : AD$$

$$\Leftrightarrow 4 : \sqrt{15} = 1 : AD$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

である。同様にして、 $CD = \frac{1}{4}$ であり、点 $D(a, b)$ とおくと

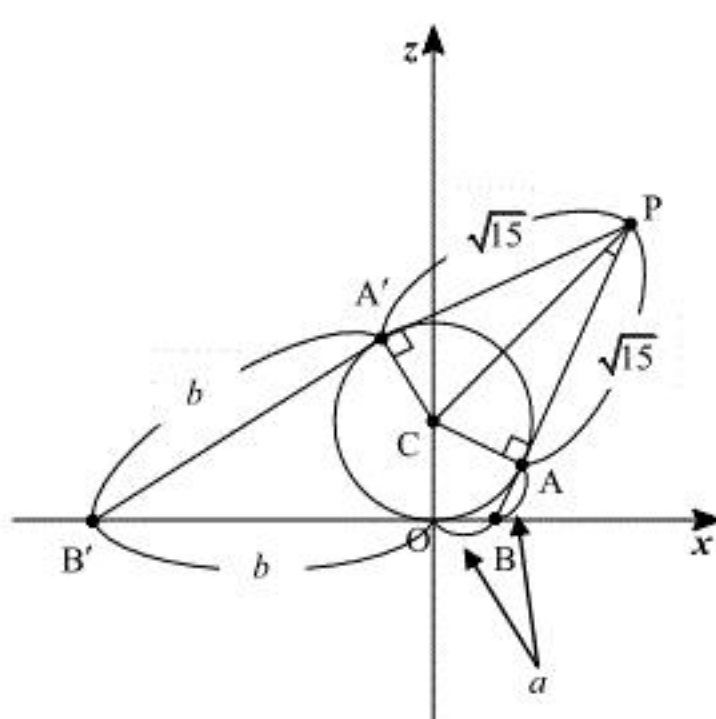
$$\overline{CD} = \frac{1}{16} \overline{CP}$$

$$\Leftrightarrow (a, b-1) = \frac{1}{16} (2\sqrt{3}, 2)$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{8}, b = \frac{9}{8}$$

となる。 y 座標は 0 なので、点 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, 0, \frac{9}{8}\right)$ となる。

(3)



上図のように点、辺の長さをおく。求めるのは、 BB' の長さで $a+b$ となる。ここで、三角形 PBB' の面積について、

$$\frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot (2a+2b+2\sqrt{15}) \cdot 1$$

が成り立つ。よって、上式を整理して、

$$\therefore a+b = 2\sqrt{15}$$

となる。

【解答】

- (1) $\boxed{\text{デ}}$ -1 $\boxed{\text{ト}}$ 2 $\boxed{\text{ナ}}$ 3 $\boxed{\text{ニ}}$ -6
 (2) $\boxed{\text{ヌ}}$ -9 $\boxed{\text{ネ}}$ 4 $\boxed{\text{ノ}}$ 3 $\boxed{\text{ハ}}$ 4
 (3) $\boxed{\text{ヒ}}$ -3 $\boxed{\text{フ}}$ 5 $\boxed{\text{ヘ}}$ 3

【解説】

(1)

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x + 3)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}(3x^2 - 6x - 9) \\ &= \frac{3}{4}(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

となるので、 $x = -1, 3$ のとき $f'(x) = 0$ となる。よって増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x = -1$ のとき、極大値 2 をとり、 $x = 3$ のとき極小値 -6 をとる。

(2)

$y = f(x)$ と y 軸との交点は

$$y = \frac{3}{4}$$

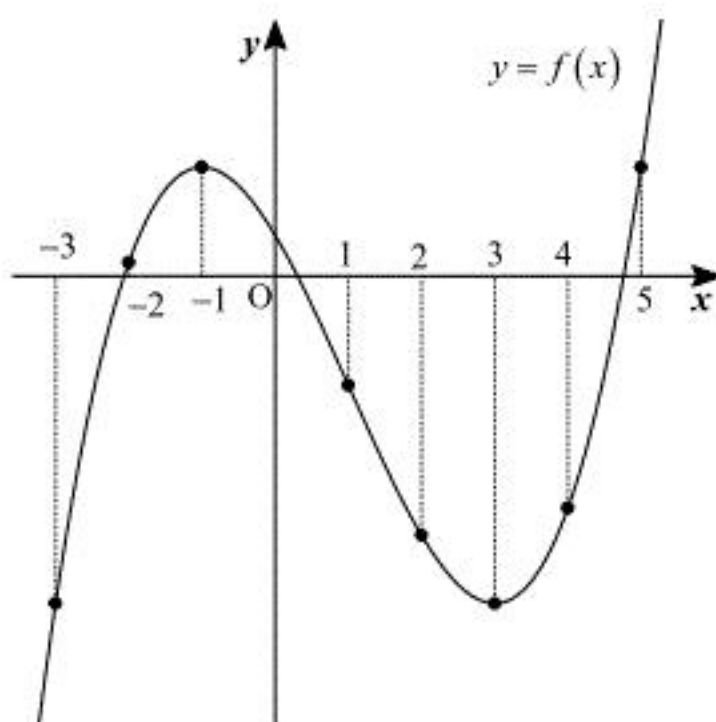
である。よって、 $y = f(x)$ 上の点 $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ における接線を求めればよい。接線の公式より、

$$y - \frac{3}{4} = f'(0)(x - 0)$$

$$\therefore y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$$

となる。

(3)



(i)

上図より、 $b = -3$ である。

(ii)

上図より、 $b = 5$ である。

(iii)

上図より、 $b \in A$ となるのは $b = -2, -1, 0$ または 5 以上の整数である。この中で、 $B \subset A$ とならないのは、 $-2, -1, 0$ の 3 個である。

【解答】

- (1)

ホ -1	マ -1	ミ 1	ム 1
メ 4	モ 2	ヤ 5	ユ -2
ラ 5	リ 7	ル -3	レ 5
- (2)

ヨ 1	コ -1
カ 1	ク -2
ケ 1	セ -1

【解説】

- (1) 部分積分を用いて

$$\begin{aligned}\int_0^u te^{-t} dt &= \left[-te^{-t} \right]_0^u + \int_0^u e^{-t} dt \\ &= \left[-te^{-t} - e^{-t} \right]_0^u \\ &= -ue^{-u} - e^{-u} + 1\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u te^{-t} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{u}{e^u} \right) + 0 + 1$$

である。ここで、 $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{e^u}$ について考えていく。関数 $f(u)$ を $f(u) = u - e^u$ とおくと、 $f(0) = -1$

であり、 $u \geq 0$ の範囲において

$$f'(u) = 1 - e^u \leq 0$$

となるから、この範囲で $f(u)$ は単調減少する。よって、 $u \geq 0$ の範囲で $f(u) < 0$ であり

$$u - e^u < 0$$

$$\therefore \frac{u}{e^u} < 1 \quad (\because e^u > 0) \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、 $u = 2v$ とおくと、

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{e^u} &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2v}{e^{2v}} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2}{v} \cdot \frac{v^2}{(e^v)^2} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2}{v} \cdot \left(\frac{v}{e^v} \right)^2 \\ &\leq \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2}{v} \cdot 1^2 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。また、0 以上のすべての u について $\frac{u}{e^u} \geq 0$ であるので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{e^u} = 0$$

である。以上より、

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u te^{-t} dt = 1$$

となる。

- (2)

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x+t) e^{t-x} f(t) dt &= af(x) \\ \Leftrightarrow 3x \int_0^2 e^{t-x} f(t) dt + \int_0^2 te^{t-x} f(t) dt &= af(x) \\ \Leftrightarrow 3x \int_0^2 e^t f(t) dt + \int_0^2 te^t f(t) dt &= ae^x f(x) \quad \dots \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、

$$p = \int_0^2 e^t f(t) dt, q = \int_0^2 te^t f(t) dt \quad (p, q \text{ は実数})$$

とおくと、

$$\begin{aligned}3px + q &= ae^x f(x) \\ \therefore f(x) &= \frac{3px + q}{ae^x}\end{aligned}$$

となる。①式に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}3x \int_0^2 \frac{3pt + q}{a} dt + \int_0^2 t \cdot \frac{3pt + q}{a} dt &= 3px + q \\ \Leftrightarrow \frac{3x}{a} \cdot \left[\frac{3}{2} pt^2 + qt \right]_0^2 + \frac{1}{a} \cdot \left[pt^3 + \frac{1}{2} qt^2 \right]_0^2 &= 3px + q \\ \Leftrightarrow 3(6p + 2q)x + 8p + 2q &= 3apx + aq\end{aligned}$$

ここで、上式は任意の実数 x に対して成り立つので、係数を比較して

$$\begin{aligned}\begin{cases} 6p + 2q = ap \\ 8p + 2q = aq \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a-6)p = 2q \\ 8p = (a-2)q \end{cases} \quad \dots \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}(a-6):2 &= 8:(a-2) \\ \Leftrightarrow (a-6)(a-2) &= 16 \\ \Leftrightarrow a &= 4 + 2\sqrt{5} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

である。また $f(x) = \left(3\frac{p}{a}x + \frac{q}{a} \right) e^{-x}$ であるから、 $A = \frac{p}{a}, B = \frac{q}{a}$ として

$$f(x) = (3Ax + B)e^{-x}$$

とかける。よって $k = -1$ である。よって条件(ii)より、

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u f(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u (3Ate^{-t} + Be^{-t}) dt \\ &= 3A + \lim_{u \rightarrow \infty} B \left[-e^{-t} \right]_0^u \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 3A + B\end{aligned}$$

である。②より

$$\begin{aligned}q &= \frac{8}{a-2} p \\ \Leftrightarrow B &= \frac{8}{a-2} A\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}B &= \frac{4}{7+3\sqrt{5}} = 7-3\sqrt{5} \\ \therefore A &= \frac{a-2}{8} B \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} B \\ &= -2 + \sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。