

(2014年度)

4 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は7ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に 7, イ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位												1 の 位											
ア	一	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	
イ	一	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を, $\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2+\boxed{1}x+\boxed{0}$ とする。

1 (1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^1 |(x-1)(x-t)| dt$$

とする。

$x \leq \boxed{\text{ア}}$, $x \geq \boxed{\text{イ}}$ のとき,

$$f(x) = \boxed{\text{ウ}} x^2 + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} x + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

$\boxed{\text{ア}} < x < \boxed{\text{イ}}$ のとき,

$$f(x) = \boxed{\text{ク}} x^3 + \boxed{\text{ケ}} x^2 + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} x + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。また、関数 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{セ}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ソ}}$ をとる。

(2) 自然数 m, n が

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{3}$$

を満たすとき、 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ の最大値は $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

2 a を 0 以上の実数とする。区間 $0 \leq x \leq 3$ において、関数 $f(x)$ を

$$0 \leq x \leq 1 \text{ のとき, } f(x) = -ax^2 + 1$$

$$1 < x \leq 3 \text{ のとき, } f(x) = -ax^2 + x$$

とする。各 a に対して、 $f(x)$ の最大値を $M(a)$ 、最小値を $m(a)$ とおく。

(1) $M(a) - m(a)$ は、

$$0 \leq a \leq \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ のとき,}$$

$$\boxed{\text{ト}} a + \boxed{\text{ナ}}$$

$$\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} < a \leq \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \text{ のとき,}$$

$$\frac{\boxed{\text{ネ}} a^2 + \boxed{\text{ノ}} a + 1}{\boxed{\text{ハ}} a}$$

$$a > \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \text{ のとき,}$$

$$\boxed{\text{ヒ}} a + \boxed{\text{フ}}$$

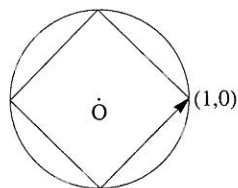
である。

(2) $M(a) - m(a)$ は、 $a = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ のとき、最小値 $\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ をとる。

3

xy 平面の原点 O を中心とする半径 1 の円形の壁の内側に鏡をはり、点 $(1, 0)$ から鏡の 1 点に向けて光を発し反射させる。ただし、壁と鏡の厚さは無視できるものとする。光は、あたった鏡の 1 点と原点を結ぶ直線に関して対称な方向へ反射される。

例えば、 $(1, 0)$ から $(0, 1)$ に向けて発せられた光は右図のように $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ で 3 回反射され、 $(1, 0)$ にもどってくる。



y 座標が正の方向へ光を発するものとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 光が鏡で 2 回反射されて初めて $(1, 0)$ にもどるには、鏡の 1 点

$$\left(\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ム} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{メ} \\ \hline \end{array}}, \sqrt{\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{モ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ヤ} \\ \hline \end{array}}} \right) \text{ に向けて光を発すればよい。}$$

- (2) 光が鏡で 4 回反射されて初めて $(1, 0)$ にもどるには、 $(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$, $(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ ($0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$) のいずれかに向けて光を発す

ればよい。ここで、 $\theta_1 = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ユ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ヨ} \\ \hline \end{array}}\pi$, $\theta_2 = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ラ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{リ} \\ \hline \end{array}}\pi$ である。

このとき、

$$\cos \theta_1 = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ル} \\ \hline \end{array} + \sqrt{\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{レ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ロ} \\ \hline \end{array}}}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ロ} \\ \hline \end{array}}$$

である。

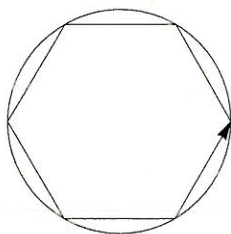
- (3) 光が鏡で6回反射されて初めて $(1, 0)$ にもどるには, $A(\cos \theta_3, \sin \theta_3)$, $B(\cos \theta_4, \sin \theta_4)$, $C(\cos \theta_5, \sin \theta_5)$ ($0 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5 < \pi$) の

いずれかに向けて光を発すればよい。ここで, $\theta_5 = \frac{\boxed{\text{ワ}}}{\boxed{\text{ヲ}}}\pi$

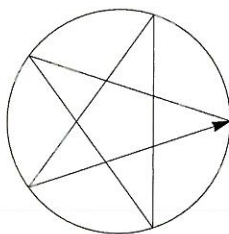
である。

- (4) (3) で A, B, C それぞれに向けて光を発したときの光の通る経路を図示すると, A の場合は , B の場合は , C の場合は である。

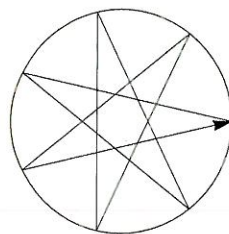
~ には以下の (a)~(f) からふさわしいものを選び。



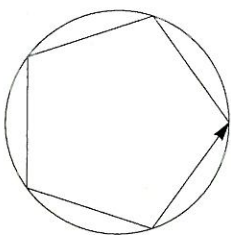
(a)



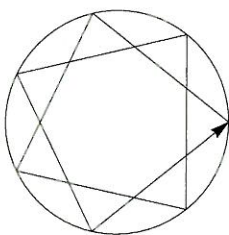
(b)



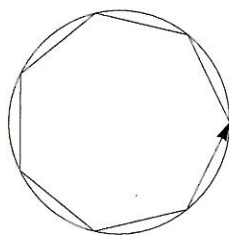
(c)



(d)



(e)



(f)

- (5) 光が鏡で31回反射されて初めて $(1, 0)$ にもどるような光の発し方は 通りある。

