

(2014年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
 2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
 3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
 4. 筆記具は，HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
 5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
 6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
 7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
 8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
 9. 試験時間中に退場してはならない。
 10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
 11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
- ◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に7, イ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を, $\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2+\boxed{1}x+\boxed{0}$ とする。

1

(1) 初項と公比が正である等比数列 $\{a_n\}$ があり, 初項 a_1 は整数で, $a_1 + a_4 = 18$ であるとする。

(i) $\{a_n\}$ の公比が整数であるとき, $\{a_n\}$ の初項となり得る数のうち最小のものは ア である。

(ii) $\{a_n\}$ からつくられた無限等比級数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

が収束し, かつ公比が有理数であるとき, $a_1 =$ イ であ

り, この無限等比級数の和は ウ である。

(2) 定義域が実数全体であり値が実数である関数 $f(x)$ に関する命題

$$P : x \geq 3 \text{ ならば } f(x) < 2 \text{ である}$$

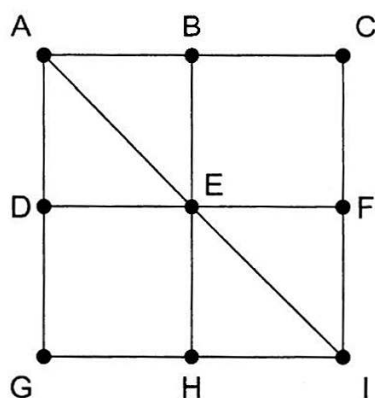
を考える。P の否定となっている命題を選択肢から 2 つ選べ。

(解答欄 あ に 2 つマークせよ。)

選択肢：

- (a) $x < 3$ ならば $f(x) \geq 2$ である。
- (b) $x \geq 3$ ならば $f(x) \geq 2$ である。
- (c) $f(x) \geq 2$ ならば $x < 3$ である。
- (d) $f(x) \geq 2$ となる $x \geq 3$ が存在する。
- (e) $f(x) < 2$ となる $x < 3$ が存在する。
- (f) $f(x) < 2$ となる $x \geq 3$ が存在する。
- (g) $f(x) < 2$ ならば $x \geq 3$ である。
- (h) $y \geq 3$ かつ $f(y) \geq 2$ を満たす実数 y が存在する。

- (3) 下図において、9つの点A～Iのどれか1つから出発し一筆書きで2つの線分をたどって3つの異なる点を結ぶ方法を考える。ただし、同じ3点を通るが出発点の異なる結び方は互いに区別するものとする。



- (i) Aを出発点とする方法は 通りある。
- (ii) Eを出発点とする方法は 通りある。
- (iii) 9つの点A～Iのどれか1つから出発する方法は全部で 通りある。

2

xyz 空間において, xy 平面に原点 $O(0,0,0)$ で接し, 中心が $C(0,0,1)$ であるような球面を S とする。点 $P(2\sqrt{3},0,3)$ に点光源をおくとき, xy 平面上にできる S の影 S' を考える。

(1) 点 P から球面 S に引いた接線のひとつと球面との接点を A とす

る。線分 PA の長さは $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。 $\angle CPA = \theta$ とすると,

$$\sin \theta = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \text{ である。}$$

(2) 球面 S 上で光が当たる部分と影の部分との境界は,

$\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}, \boxed{\text{シ}}, \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \right)$ を中心とし, 半径が $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ の円である。

(3) 影 S' は長軸の長さが $\boxed{\text{チ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ の楕円の内部である。

3 $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - 9x + 3)$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ は、 $x =$ で極大値 をとり、

$x =$ で極小値 をとる。

(2) $y = f(x)$ のグラフと y 軸との交点における接線の方程式は、

$$y = \frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}x + \frac{\text{ノ}}{\text{ハ}}$$

である。

(3) 実数からなる集合

$$A = \{x \mid f(x) > 0\}, \quad B = \{x \mid x \geq b\}$$

を考える。ただし、 b は整数とする。

(i) $A \subset B$ となる最大の整数 b は である。

(ii) $B \subset A$ となる最小の整数 b は である。

(iii) $b \in A$ であり、 $B \subset A$ とならない整数 b は 個ある。

4 (1) $\int_0^u te^{-t} dt = \boxed{\text{ホ}} ue^{-u} + \boxed{\text{マ}} e^{-u} + \boxed{\text{ミ}}$ であり, これより

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u te^{-t} dt = \boxed{\text{ム}}$$

である。

- (2) 定義域が実数全体であり値が実数である連続関数 $f(x)$ と正の定数 a が次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たしているとする。

- (i) 任意の実数 x に対して

$$\int_0^2 (3x+t)e^{t-x} f(t) dt = a f(x)$$

が成り立つ。

- (ii) $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u f(t) dt = 1$ が成り立つ。

このとき $a = \boxed{\text{メ}} + \boxed{\text{モ}} \sqrt{\boxed{\text{ヤ}}}$ であり, また

$$f(x) = (3Ax + B)e^{kx}$$

ただし, $A = \boxed{\text{ユ}} + \boxed{\text{ヨ}} \sqrt{\boxed{\text{ラ}}}$

$$B = \boxed{\text{リ}} + \boxed{\text{ル}} \sqrt{\boxed{\text{レ}}}$$

$$k = \boxed{\text{ロ}}$$

である。