

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ				
	1	3	3	1	-3	3	6				
(2)	ク	ケ	コ								
	0	3	9								
(3)	サ	シ									
	54	107									

【解説】

(1) 直線 ℓ とグラフ G の交点の個数は、2 式を連立してできた 3 次方程式

$$\begin{aligned} -3x+k &= 4x^3-12x+1 \\ \Leftrightarrow 4x^3-9x+1 &= k \end{aligned}$$

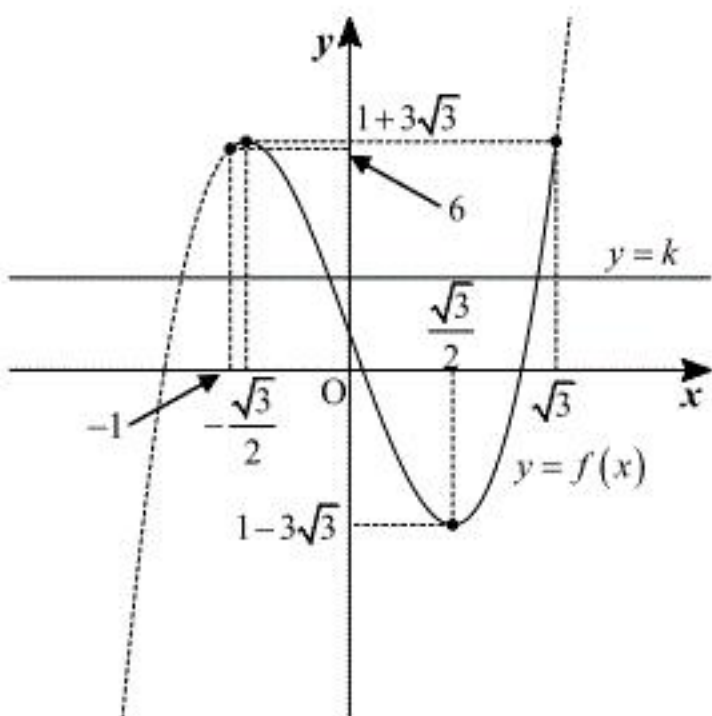
の解のうち、 $-1 \leq x \leq \sqrt{3}$ を満たすものの個数と一致する。ここで、関数 $f(x)$ を $f(x)=4x^3-9x+1 (-1 \leq x \leq \sqrt{3})$ とおくと、これは xy 平面上において曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の交点の個数と一致する。 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を計算して因数分解すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2-9 \\ &= 12\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	6	↗	$1+3\sqrt{3}$	↘	$1-3\sqrt{3}$	↗	$1+3\sqrt{3}$

よって、曲線 $y=f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



したがって、求める k の条件は $k=1+3\sqrt{3}$ または $1-3\sqrt{3} < k < 6$ である。

(2) まず、真数条件より $x > 0$ となることが必要である。このとき、対数の満たす性質から

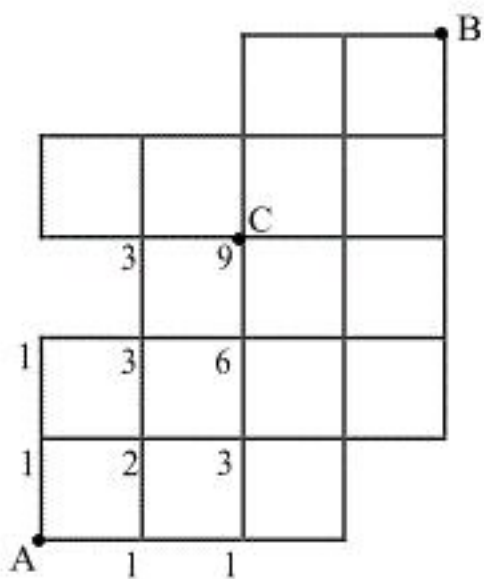
$$\begin{aligned} \log_3 x &= \frac{\log_9 x}{\log_9 3} = 2 \log_9 x = \log_9 x^2 \\ \log_2 x + 2 &= \log_2 x + \log_2 4 = \log_2 4x \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、与えられた不等式は条件 $x > 0$ の下で

$$\begin{aligned} 9^{\log_3 x} - 3 \cdot 2^{(\log_2 x + 2)} + 3^3 &> 0 \\ \Leftrightarrow 9^{\log_9 x^2} - 3 \cdot 2^{\log_2 4x} + 27 &> 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x-9) &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 3, 9 < x \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

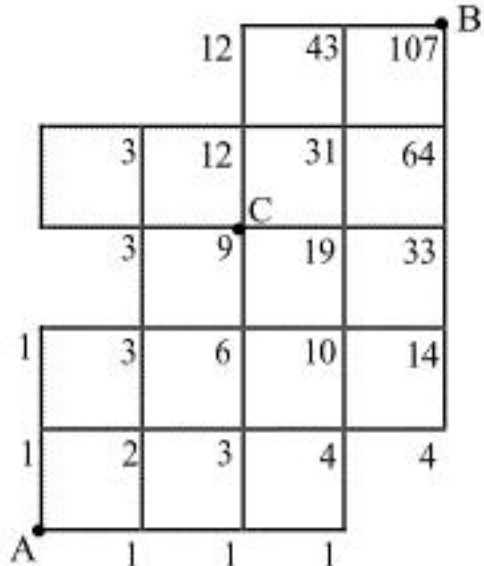
と解くことができる。

(3)(i) A から C まで最短距離で行く道順は、以下の図のように道が交差する点に順に道順の数を書いていくと、9 通りであることがわかる。



また、C から B まで最短距離で行く道順は、 ${}_4C_2$ 通りであるから、C を経由して A から B まで最短距離で行く道順は $9 \times {}_4C_2 = 54$ [通り] である。

(ii) A から B まで最短距離で行く道順は、以下の図のように道が交差する点に順に道順の数を書いていくと、107 通りであることがわかる。



[解答]

ス	26	セ	-3	
ソ	35	タ	3	
チ	9	ツ	15	テ 2
ト	29	ナ	22	ニ 21

[解説]

(1)

与方程式を x について解くと、 $x = \frac{1-355y}{41}$ となる。ここで、 $355 = 41 \cdot 8 + 27$ より

$$x = \frac{1-27y}{41} - 8y$$

とも表せる。 $0 < x < 100$ かつ x, y は整数であることから、

$$0 < \frac{1-355y}{41} < 100$$

$$\Leftrightarrow -11 \leq y \leq 0$$

である。これらのうち、 $\frac{1-27y}{41}$ が整数となる y は $y = -3$ のみであり、このとき x の値は

$$x = \frac{1-355 \cdot (-3)}{41} = 26$$

となる。

(2)

x, y を 0 以上の整数として、出した普通郵便を x 通、簡易書留を y 通とおくと、

$$82x + 710y = 5000$$

が成り立つ。ここで、

$$82x = 5000 - 710y = 2 \cdot 5 \cdot (500 - 71y)$$

であるから、 x は 5 を因数にもつ。したがって、 x' を 0 以上の整数として $x = 5x'$ とおくと、

$$82 \cdot 5x' + 710y = 5000$$

$$\Leftrightarrow 41x' + 71y = 500$$

$$\Leftrightarrow x' + y + 10 \cdot (4x' + 7y) = 500$$

$$\therefore x' + y = 10 \cdot \{50 - (4x' + 7y)\}$$

と変形できるから、 $x' + y$ は 10 を因数にもつ。したがって、 z を 0 以上の整数として

$x' + y = 10z$ とおくと、

$$41(10z - y) + 71y = 500$$

$$\Leftrightarrow 3y + 41z = 50$$

となる。 $y \geq 0$ および $z \geq 0$ より、これを満たす整数 y, z の組は $y = 3, z = 1$ のみであるから、

$$x' = 10 \cdot 1 - 3 = 7$$

$$x = 5 \cdot 7 = 35$$

より、出した普通郵便は 35 通、簡易書留は 3 通である。

(3)

x, y を 0 以上の整数として、使った 82 円切手を x 枚、205 円切手を y 枚とおくと、合計額は

$$82x + 205y = 41(2x + 5y) \text{ [円]}$$

である。 $2x + 5y$ は整数であるから、合計額は 41 の倍数である。6100 以上 6110 未満の整数のうち、41 の倍数となるのは $6109 = 41 \cdot 149$ のみであるから、合計額は 6109 円である。ここで、

$$82x + 205y = 6109$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5y = 149$$

$$\Leftrightarrow 5y = 149 - 2x$$

と変形すると、上式の右辺は奇数であるから、左辺も奇数となり、 y も奇数となる。したがって、 y' を 0 以上の整数として $y = 2y' + 1$ とおくと、

$$2x + 5(2y' + 1) = 149$$

$$\Leftrightarrow x + 5y' = 72$$

$$\therefore x = 5(14 - y') + 2$$

となる。 $14 - y'$ は整数であるから、 x は 5 で割ると 2 余る数である。したがって、 x' を 0 以上の整数として $x = 5x' + 2$ とおくと、

$$5x' + 2 + 5y' = 72$$

$$\Leftrightarrow x' + y' = 14$$

となり、 $x' \geq 0$ および $y' \geq 0$ より、これを満たす (x', y') の組は

$$(x', y') = (0, 14), (1, 13), \dots, (14, 0)$$

の 15 通り存在し、このとき $(x, y) = (5x' + 2, 2y' + 1)$ は全て条件を満たすから、求める組み合わせは 15 通りである。ここで、2 種類の切手の合計枚数を x' を用いて表すと、

$$\begin{aligned} x + y &= 5x' + 2 + 2y' + 1 \\ &= 5x' + 2(14 - x') + 3 \\ &= 3x' + 31 \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq x' \leq 14$ であるから、 $(x', y') = (0, 14)$ のとき、すなわち 82 円切手が 2 枚、205 円切手が 29 枚のとき、 $x + y$ は最小値 31 をとる。一方、切手の枚数の差を x' を用いて表すと、

$$\begin{aligned} |x - y| &= |5x' + 2 - 2y' - 1| \\ &= |5x' - 2(14 - x') + 1| \\ &= |7x' - 27| \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq x' \leq 14$ であるから、 $(x', y') = (4, 10)$ のとき、すなわち 82 円切手が 22 枚、205 円切手が 21 枚のとき、 $|x - y|$ は最小値 1 をとる。

[解答]

ヌ	5	ネ	6		
ノ	1	ハ	3	ヒ	1
フ	3	ヘ	1	ホ	2
マ	1	ミ	2	ム	4
メ	3	モ	4	ヤ	3
ユ	18				

[解説]

(1)

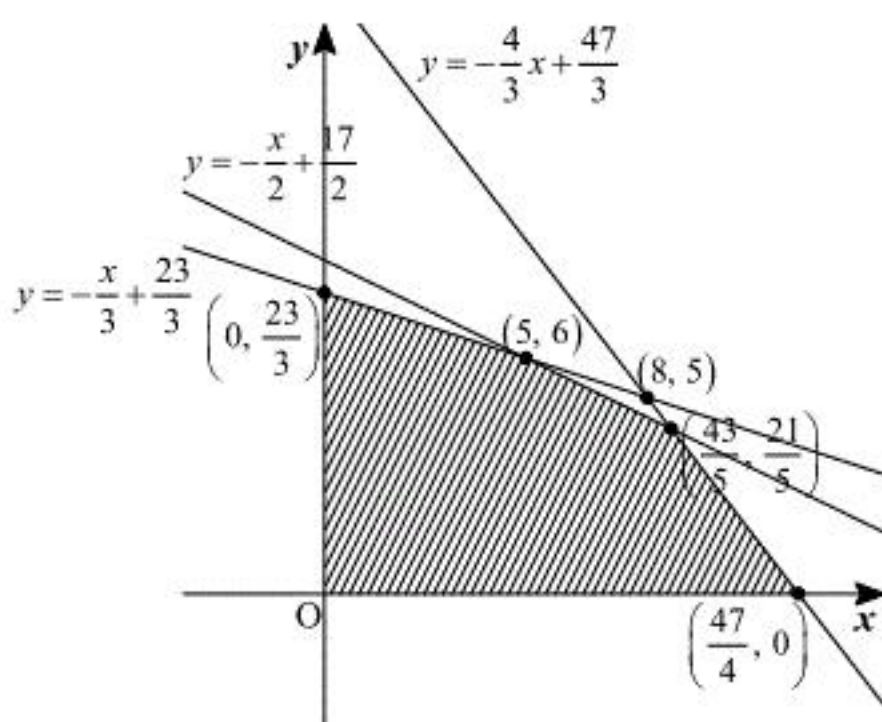
製品 X, Y の生産量をそれぞれ x, y kg とおく。 $c=17$ かつ原料の在庫より、以下の3式が成り立つ。

$$x+3y \leq 23$$

$$4x+3y \leq 47$$

$$x+2y \leq 17$$

$x > 0, y > 0$ より xy 平面の第一象限においてこれらの条件をみたす領域は下図の斜線部となる。境界となる直線の交点の座標も下図の通りである。



いま利益は $px+qy$ と表される。これを k とおく。 k が最大となるには直線 $y = -\frac{p}{q}x + \frac{k}{q}$ が上図の領域と共有部分を持ち、 y 切片が最大となるときである。条件より $(p, q) = (2, 5)$ だから、 $-\frac{1}{2} < -\frac{2}{5} < -\frac{1}{3}$ が成り立つ。よって k が最大となるのは直線 $y = -\frac{p}{q}x + \frac{k}{q}$ が点 $(5, 6)$ を通るときである。したがって X を 5 kg, Y を 6 kg 生産すればよい。

(2)

$p > 0, q > 0$ より $-\frac{p}{q} < 0$ となる。 k が最大となる (x, y) の組がただ一つに定まるためには、直

線 $y = -\frac{p}{q}x + \frac{k}{q}$ が上図の領域の上側とただ一点で接すればよい。そのようになるための必要

十分条件は、直線の傾きと領域の上側の境界部分の傾きが一致しないことである。よって

$-\frac{p}{q} \neq -\frac{1}{3}, -\frac{p}{q} \neq -\frac{1}{2}, -\frac{p}{q} \neq -\frac{4}{3}$ より、求める条件は、

$$0 < \frac{p}{q} < \frac{1}{3} \text{ または } \frac{1}{3} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2} \text{ または } \frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{4}{3} \text{ または } \frac{4}{3} < \frac{p}{q}$$

となる。

(3)

原料 C を最も多く使う (x, y) の組を考える。 x 軸, y 軸, 直線 $y = -\frac{x}{3} + \frac{23}{3}, y = -\frac{4}{3}x + \frac{47}{3}$ に

よって囲まれる領域を D とおく。(1)と同様の考え方をつかう。 $-\frac{4}{3} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ より、直線

$y = -\frac{x}{2} + \frac{c}{2}$ が D と共有部分を持ち、 y 切片が最大となるのは、直線 $y = -\frac{x}{2} + \frac{c}{2}$ が点 $(8, 5)$ を

通るときである。よってこのときの c の値は、

$$\begin{aligned} 5 &= -\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{c}{2} \\ \Leftrightarrow c &= 18 \end{aligned}$$

と計算できる。したがって $c > 18$ であれば、 (x, y) の組にかかわらず原料 C を余らせることができる。