

1

(1)(i)

$M = a^x$ を満たす実数 x を $\log_a M$ と定義する。

(答) 前述

(ii)

$x = \log_a M$ とするとき,

$$M = a^x$$

より, 任意の実数 p に対して

$$M^p = a^{px}$$

が成り立つ。したがって, 対数の定義より,

$$px = \log_a M^p$$

$$\Leftrightarrow p \log_a M = \log_a M^p$$

が成り立つ。これを用いると,

$$\begin{aligned} (\log_a b)(\log_c a) &= \log_c a^{\log_a b} \\ &= \log_c b \end{aligned}$$

が成り立つので, 両辺を $\log_c a$ で割ることによって,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

より,

$$\begin{aligned} \log(xy) &= \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 第2項について, $t = xu$ とおくと,

$$\begin{array}{c|c} dt = xdu & \\ \hline \begin{array}{c} t \\ u \end{array} & \begin{array}{c} x \rightarrow xy \\ 1 \rightarrow y \end{array} \end{array}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \log(xy) &= \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{xu} xdu \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{u} du \\ &= \log x + \log y \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

2

(1)

$\vec{x}$ は単位ベクトルであるから、 $\vec{x}$ は実数 θ を用いて

$$\vec{x} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) &= |\vec{x}|^2 - \vec{x} \cdot \vec{p} \\ &= 1 - (\cos \theta, \sin \theta) \cdot (p, 0) \\ &= 1 - p \cos \theta \\ &\geq 1 - p \\ &> 0 \quad (\because 0 < p < 1)\end{aligned}$$

となるので、 $\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \neq 0$ より $\vec{x}$ と $\vec{x} - \vec{p}$ は直交しない。

(証明終)

(2)

$\vec{x}$ と $\vec{x} - \vec{q}$ が直交するとき、

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot (\vec{x} - \vec{q}) &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 - \vec{x} \cdot \vec{q} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{q} &= 1\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}|\vec{x} - \vec{q}|^2 &= |\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \\ &= 1 - 2 \cdot 1 + q^2 \\ &= q^2 - 1\end{aligned}$$

と求まり、 $q > 1$ より、

$$|\vec{x} - \vec{q}| = \sqrt{q^2 - 1}$$

となる。

$$(答) \quad |\vec{x} - \vec{q}| = \sqrt{q^2 - 1}$$

(3)(i)

$$\begin{aligned}|\vec{x} - \vec{p}| : |\vec{x} - \vec{q}| &= 1 : 2 \\ \Leftrightarrow 2|\vec{x} - \vec{p}| &= |\vec{x} - \vec{q}|\end{aligned}$$

と変形できるので、両辺 2 乗して、

$$\begin{aligned}4|\vec{x} - \vec{p}|^2 &= |\vec{x} - \vec{q}|^2 \\ \Leftrightarrow 4|\vec{x}|^2 - 8\vec{x} \cdot \vec{p} + 4|\vec{p}|^2 &= |\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 θ を用いて $\vec{x} = (\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと、

$$\begin{aligned}4 \cdot 1 - 8p \cos \theta + 4p^2 &= 1 - 2q \cos \theta + q^2 \\ \Leftrightarrow 2(4p - q) \cos \theta + (-4p^2 + q^2 - 3) &= 0\end{aligned}$$

となる。任意の実数 θ について、上式が成り立つ必要十分条件は、

$$\begin{cases} 4p - q = 0 & \cdots \text{①} \\ -4p^2 + q^2 - 3 = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

である。①、②より q を消去すると、

$$\begin{aligned}-4p^2 + 16p^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 &= \frac{1}{4} \\ \therefore p &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 < p < 1)\end{aligned}$$

となり、①より $q = 2$ である。これは $q > 1$ を満たすので、

$$(p, q) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

と求まる。

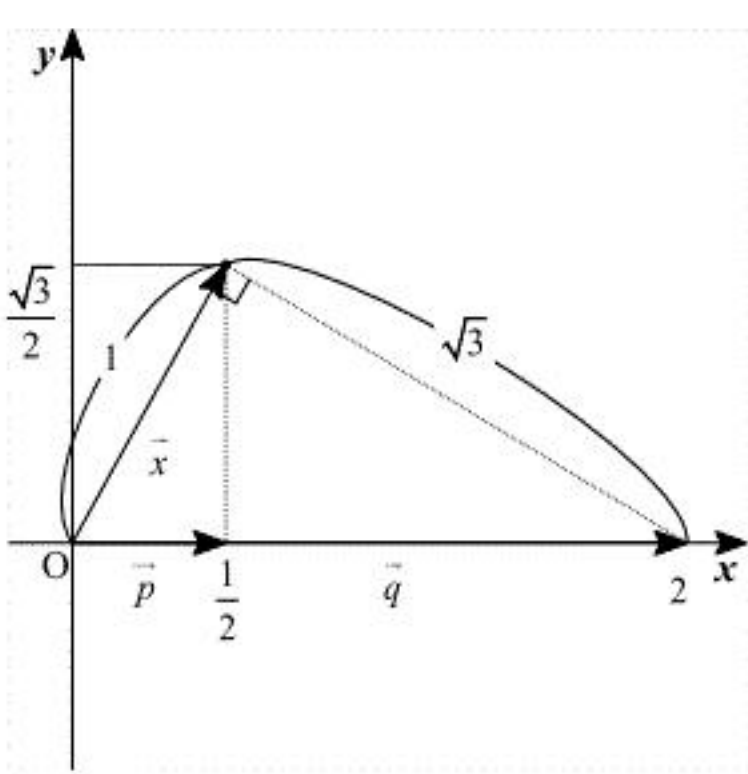
$$(答) \quad (p, q) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

(ii)

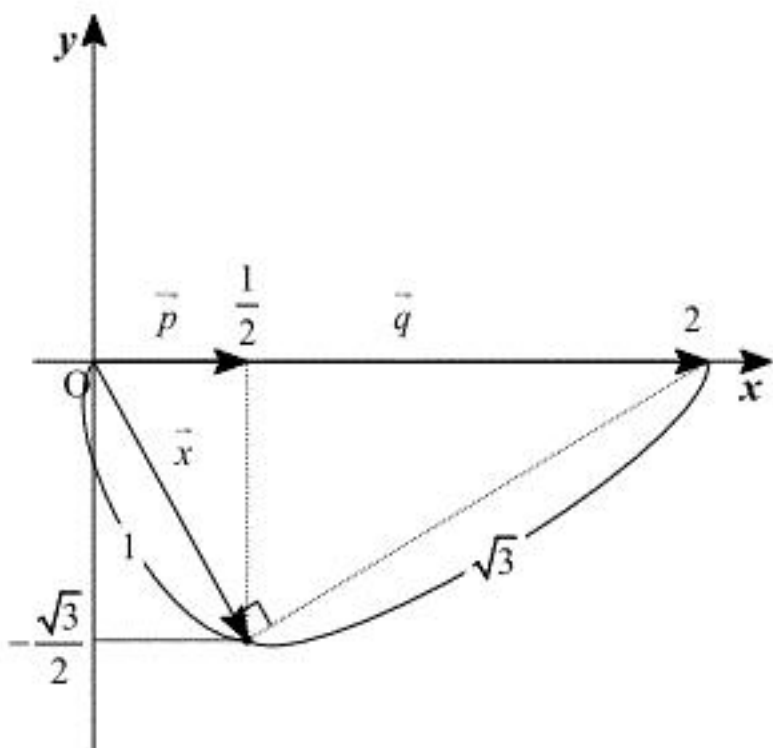
(2)より、

$$\begin{aligned}|\vec{x} - \vec{q}| &= \sqrt{2^2 - 1} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

であるから、 $\vec{x}$ 、 $\vec{x} - \vec{q}$ 、 $\vec{q}$ によって $1 : \sqrt{3} : 2$ の直角三角形ができる。このとき $\vec{x}$ と $\vec{q}$ のなす角は 60° であるから $\vec{x}$ 、 $\vec{p}$ 、 $\vec{q}$ の位置関係を図示すると、



または



となる。

(答) 前図

(iii)

$\vec{s}$ が $\vec{x}$ と平行になるとき、 $\vec{s}$ は 0 でない実数 k を用いて

$$\vec{s} = k\vec{x}$$

と表せる。

$$|\vec{x} - \vec{q}| = 2|\vec{x} - \vec{p}|$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \frac{\vec{x} - \vec{p}}{|\vec{x} - \vec{p}|^3} - a \frac{\vec{x} - \vec{q}}{|\vec{x} - \vec{q}|^3} \\ \Leftrightarrow k\vec{x} &= \frac{\vec{x} - \vec{p}}{|\vec{x} - \vec{p}|^3} - a \frac{\vec{x} - \vec{q}}{8|\vec{x} - \vec{p}|^3} \\ \Leftrightarrow 8k|\vec{x} - \vec{p}|^3 \vec{x} &= 8(\vec{x} - \vec{p}) - a(\vec{x} - \vec{q}) \quad (\because |\vec{x} - \vec{p}| > 0) \\ \Leftrightarrow (8k|\vec{x} - \vec{p}|^3 + a - 8) \vec{x} &= a\vec{q} - 8\vec{p}\end{aligned}$$

であるから、任意の $\vec{x}$ について、この式を満たす 0 でない k が存在するための必要条件は、

$$a\vec{q} - 8\vec{p} = \vec{0}$$

であり、(i)より $p = \frac{1}{2}$ 、 $q = 2$ であるから

$$\begin{aligned}a(2, 0) - 8\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= (0, 0) \\ \Leftrightarrow 2a - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2\end{aligned}$$

となる。逆に、このとき、

$$\begin{aligned}(8k|\vec{x} - \vec{p}|^3 - 6) \vec{x} &= \vec{0} \\ \therefore k &= \frac{3}{4|\vec{x} - \vec{p}|^3} \neq 0\end{aligned}$$

であり、 $a = 2$ は十分条件である。

(答) $a = 2$

【解答】

- (1) ア −3 イ 1 ウ −7 エ 1 オ 8 カ −3
 (2) キ 4 ク −3 ケ 16 コ −20 サ 5
 (3) シ 78 ス 35 セ 16
 (4) 4

【解説】

(1)

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt{5}$$

より

$$(2x - 3)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \cdots \text{①}$$

である。また、

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x$$

であるから、 $y = x^2$ とすると

$$(x^2 + 1)^2 = 9x^2$$

$$\Leftrightarrow (y + 1)^2 = 9y$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 7y + 1 = 0$$

である。①より、

$$x^2 = 3x - 1$$

であるから、

$$x^3 = x \cdot x^2$$

$$= x(3x - 1)$$

$$= 3x^2 - x$$

$$= 3(3x - 1) - x$$

$$= 8x - 3$$

と求まる。

(2)

加法定理より、

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta \\ &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \\ \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2\sin \theta \cos^2 \theta + (1 - 2\sin^2 \theta)\sin \theta \\ &= 2\sin \theta(1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2\sin^3 \theta \\ &= -4\sin^3 \theta + 3\sin \theta \end{aligned}$$

と計算できるので、

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos(3\theta + 2\theta) \\ &= \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta \\ &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta)(2\cos^2 \theta - 1) - (-4\sin^3 \theta + 3\sin \theta) \cdot 2\sin \theta \cos \theta \\ &= (8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta) + \{8(1 - \cos^2 \theta)^2 \cos \theta - 6(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta\} \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta + \{8\cos^3 \theta - 16\cos^3 \theta + 8\cos \theta + (6\cos^3 \theta - 6\cos \theta)\} \\ &= 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

n を自然数とすると、第 n 群の項数は $n+1$ 個である。したがって、 $n \geq 2$ のとき、第 n 群第 1 項は最初から数えて、

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) &= 1 + \left\{ \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) \right\} \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

より、第 $\frac{n(n+1)}{2}$ 項であり、上式は $n=1$ のときも成立する。 a^{12} が初めて現れるのは、第 12 群第 1 項であるから、最初から数えて、

$$\frac{12 \cdot 13}{2} = 78$$

より、第 78 項である。また、

$$\frac{35 \cdot 36}{2} = 630$$

$$\frac{36 \cdot 37}{2} = 666$$

より、

$$\frac{35 \cdot 36}{2} < 645 < \frac{36 \cdot 37}{2}$$

であるから、最初から数えて第 645 項は第 35 群に存在する。最初から数えて第 630 項が第 35 群第 1 項であるから、

$$645 - 630 + 1 = 16$$

より、最初から数えて第 645 項は第 35 群 16 項である。

(4)

事象 A が起こる確率を $P(A)$ 、事象 B が起こる確率を $P(B)$ 、事象 A と B が同時に起きる確率を $P(A \cap B)$ とすると、2 つの試行が独立であることは

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) \quad \cdots \text{①}$$

であることに等しい。a に関して、

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{4}{8} \\ &= \frac{1}{2} \\ P(B) &= \frac{4}{8} \\ &= \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) &= \frac{4 \times 4}{8 \times 8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であることから①が成り立つので A と B は独立である。b に関して、

$$P(A) = \frac{1}{365}$$

$$P(B) = \frac{1}{365}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1 \times 1}{365 \times 365}$$

であることから①が成り立つので A と B は独立である。c に関して、

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

より

$$P(A)P(B) = \frac{6}{25}$$

であるが、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{3 \times 2}{5 \times 4} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

となることから①は成り立たないため、 A と B は独立でない。以上より、a と b に関して 2 つの試行は独立である。