

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	2	2	3	1	2
	カ	キ	ク	ケ	
	2	-3	2	3	
(2)	コ	サ	シ	ス	セ
	-1	-1	4	3	4
	ソ	タ	チ	ツ	テ
	2	-1	2	3	2
	ト	ナ	ニ		
	-1	2	2		

【解説】

(1)(i)

$f(x)=0$ となるのは

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left| |x^2-3|-1 \right| &= 0 \\ \Leftrightarrow |x^2-3| &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2, 4 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{2}, 2 \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

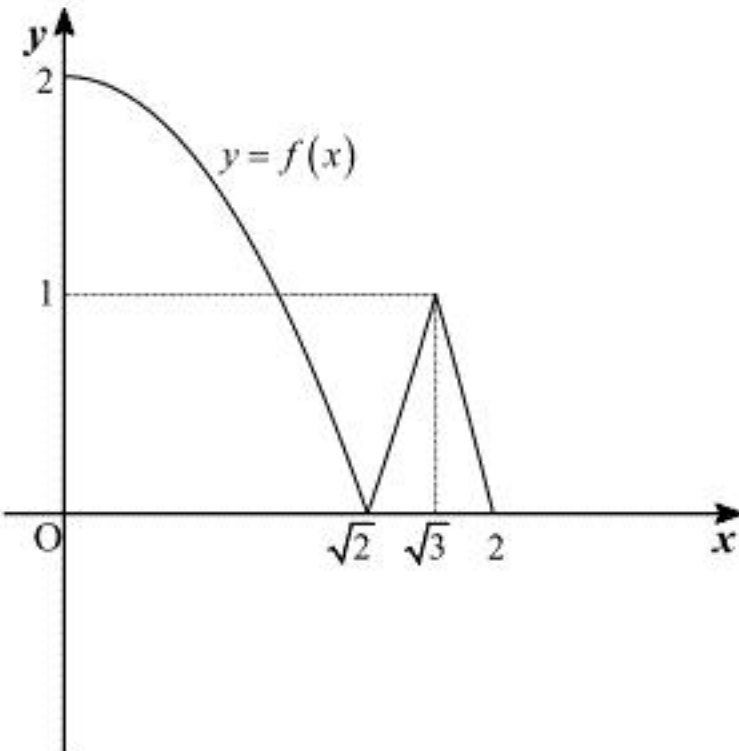
のときである。

(ii)

関数 $f(x)$ は区間 $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ において、

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2 & (\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}) \\ -x^2+4 & (\sqrt{3} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

となる。よって、 $y=f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



よって、 $x=\sqrt{3}$ で極大値1をとる。

(iii)

関数 $f(x)$ は区間 $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ において、

$$f(x)=2-x^2$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{3}{8} f(x) dx &= \frac{3}{8} \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} (-x^2+2) dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^2-2) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (-x^2+4) dx \right\} \\ &= \frac{3}{8} \left\{ \left[-\frac{1}{3}x^3+2x \right]_0^{\sqrt{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3-2x \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \left[-\frac{1}{3}x^3+4x \right]_{\sqrt{3}}^2 \right\} \\ &= 2+\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

と計算できる。

(2)

$2^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$g(x)=4t^3-3\left(1+\sqrt{2}\right)t^2+3\sqrt{2}t$$

となる。これを t の関数とみて $h(t)$ とおくと、その導関数は

$$\begin{aligned} h'(t) &= 12t^2-6\left(1+\sqrt{2}\right)t+3\sqrt{2} \\ &= 12\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

となるから、 $h(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$h'(t)$		+	0	-	0	+
$h(t)$		↗	$\frac{-1+3\sqrt{2}}{4}$	↘	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$	↗

ここで $t(=2^x)$ は x に関して単調に増加するから、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...
$g(x)$		↗	$\frac{-1+3\sqrt{2}}{4}$	↘	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$	↗

よって、 $g(x)$ は $x=-1$ で極大値 $\frac{-1+3\sqrt{2}}{4}$ を、 $x=-\frac{1}{2}$ で極小値 $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$ をとることがわかる。

〔解答〕

(1)	$\boxtimes$	$\boxplus$	$\diagup$	$\frown$	$\boxdot$
	2	1	2	1	1
	$\boxminus$	$\frown$	$\boxdot$	$\boxtimes$	
	1	2	0	0	
(2)	$\boxdot$	$\boxplus$	$\boxtimes$		
	4	1	2		

〔解説〕

(1)(i)

 $a \oplus b$ の定め方から、 $N=4$ のときは

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \oplus 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 \oplus 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(ii)

数列 $\{A_n\}$ を漸化式 $A_1=1, A_{n+1}=A_n+(n+1)$ で定めると、 a_n は A_n を N で割った余りと一致する。 $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}n(n-1) + (n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ のときも成立する。 $N \geq 4$ かつ N が偶数のときは

$$A_{N+1} = \frac{1}{2}(N+1)(N+2) = \left(\frac{1}{2}N+1\right) \cdot N + \left(\frac{1}{2}N+1\right)$$

となり、 $\frac{1}{2}N+1$ は整数かつ $0 < \frac{1}{2}N+1 < N$ であるから $a_{N+1} = \frac{1}{2}N+1$ となる。また、 $N \geq 4$ かつ N が奇数のときは

$$A_{N+1} = \frac{1}{2}(N+1)(N+2) = \left(\frac{N+1}{2}+1\right)N+1$$

となり、 $\frac{N+1}{2}$ は整数かつ $1 < N$ であるから $a_{N+1} = 1$ となる。

(iii)

(ii)と同様に考えて、 N が偶数のときは

$$A_{N-1} = \frac{1}{2}(N-1)N = \left(\frac{N}{2}-1\right)N + \frac{N}{2}$$

となり、 $\frac{N}{2}$ は整数かつ $0 < \frac{N}{2} < N$ であるから $a_{N-1} = \frac{1}{2}N$ となり、 N が奇数のときは

$$A_{N-1} = \frac{1}{2}(N-1)N = \frac{N-1}{2} \cdot N$$

となり、 $\frac{N-1}{2}$ は整数であるから $a_{N-1} = 0$ となる。

(2)

数列 $\{B_n\}$ を漸化式 $B_1=1, B_{n+1}=B_n+(2n+1)$ で定めると、 b_n は B_n を N で割った余りと一致する。 $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} B_n &= B_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (B_{k+1} - B_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + (n-1) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ のときも成立する。 N が偶数のときは

$$B_M = M^2 = \frac{N}{4} \cdot N$$

より、 $b_M = 0$ となる必要十分条件は N が 4 の倍数であることである。一方、 N が 4 の倍数でない偶数のとき、

$$B_M = M^2 = \frac{N-2}{4} \cdot N + \frac{1}{2}N$$

となり、 $\frac{N-2}{4}, \frac{1}{2}N$ は整数かつ $0 < \frac{1}{2}N < N$ であるから $b_M = \frac{1}{2}N$ であることがわかる。

3

【解答】

(1)	モ	ヤ	ユ	ヨ	ロ	
	-2	4	4	2		
(2)	ヲ	リ	ル	レ		
	-1	2	-3	2		
	ワ	ヲ	ン			
	2	4	8			
(3)	あ					
	-2					
(4)	い	う				
	10	-10				
(5)	え	お	か	き	く	
	15	9	-11	-6	-5	

【解説】

(1)

【解説】

(1) ある点 (x, y) に対し、どのような a の値に対しても円 C_a が通るためには、特に $a=0, 1$ でも通る必要があることから、 C_a の式に $a=0, 1$ を代入してできた関係式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 + y^2 + (x+3y-10) = 20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x+3y-10=0 \end{cases}$$

を満たさなければならない。逆にこの2式を満たせば、どのような a の値に対しても

$$x^2 + y^2 + a(x+3y-10) = 20$$

が成立するから、これが必要十分条件であることがわかる。この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x+3y-10=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 6y + 8 = 0 \\ x = -3y + 10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y-4) = 0 \\ x = -3y + 10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) = (-2, 4), (4, 2)$$

となるから、点 P, Q の座標は P(-2, 4), Q(4, 2) ($\because -2 < 4$) であることがわかる。

(2)

円 C_a の式を変形すると

$$x^2 + y^2 + a(x+3y-10) = 20 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{5}{2}(a^2 + 4a + 8)$$

となる。よって、この円の中心の座標は $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{3}{2}a\right)$ であり、 C_a の半径 r の2乗の値は

$$r^2 = \frac{5}{2}(a^2 + 4a + 8)$$

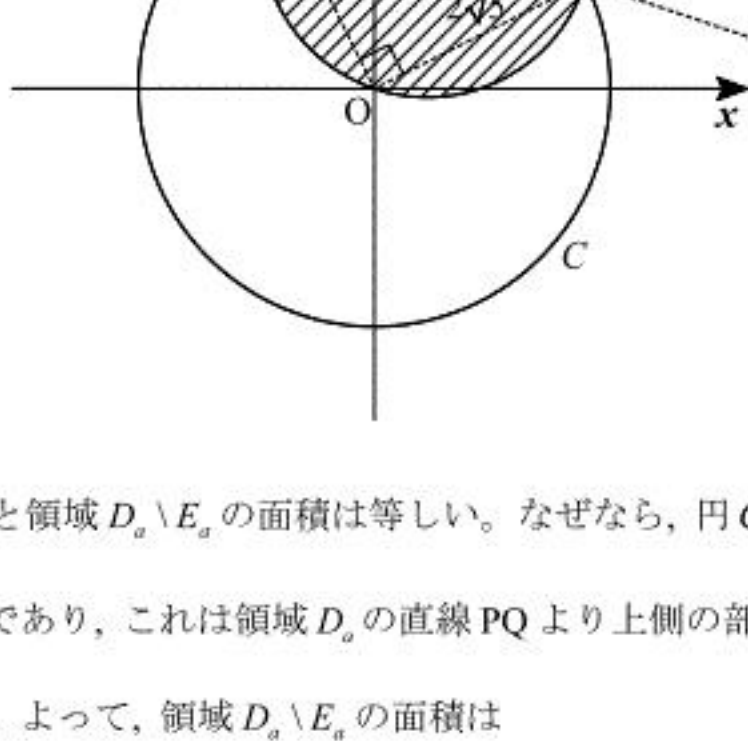
(3) (2)の結果より、半径 r の2乗の値は

$$r^2 = \frac{5}{2}\{(a+2)^2 + 4\}$$

と表せることがわかる。よって、半径 $r(>0)$ の値は $a=-2$ のとき最小になることがわかる。

(4)

以下、領域 D と D_a の共通部分を E_a とおく。 $a=-2$ のとき領域 E_a を図示すると、以下の図の斜線部のようになる。このとき、直線 PQ: $x+3y-10=0$ は円 C_a の中心 $(1, 3)$ を通り、また、 $OP=2\sqrt{5}$, $OQ=2\sqrt{5}$, $PQ=2\sqrt{10}$ より $\triangle OPQ$ は直角二等辺三角形であることに注意する。



まず、 $\triangle OPQ$ の面積と領域 $D_a \setminus E_a$ の面積は等しい。なぜなら、円 C について扇形 OPQ の面積は $\frac{1}{4}\pi(2\sqrt{5})^2 = 5\pi$ であり、これは領域 D_a の直線 PQ より上側の部分の面積 $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{10})^2 = 5\pi$ と等しいからである。よって、領域 $D_a \setminus E_a$ の面積は

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{5})^2 = 10$$

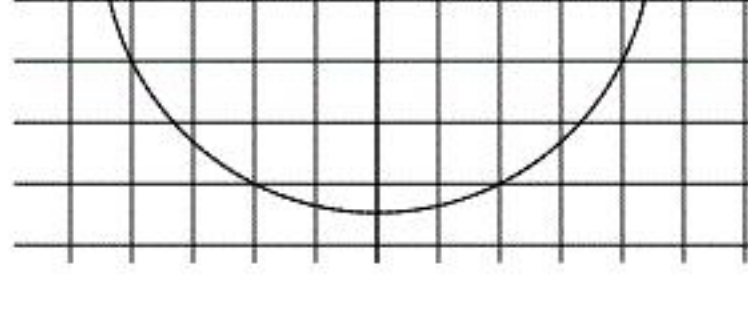
と求まるから、領域 E_a の面積は

$$\pi(\sqrt{10})^2 - 10 = 10\pi - 10$$

であることがわかる。

(5)(i)

$a=-4$ のとき、領域 E_a を図示すると、以下の図の斜線部のようになる。



この領域に含まれる格子点の数 $n(a)$ を、直線 $y=k$ (k は整数) 上の格子点の数を順に考えていくことで求める。まず、領域 D 内の点 (x, y) は不等式 $x^2 + y^2 \leq 20$ を満たすから、 y は

$$-2\sqrt{5} \leq y \leq 2\sqrt{5}$$

を満たし、領域 D_a 内の点 (x, y) は不等式 $(x-2)^2 + (y-6)^2 \leq (2\sqrt{5})^2$ を満たすから、 y は

$$6-2\sqrt{5} \leq y \leq 6+2\sqrt{5}$$

を満たす。よって、領域 E_a 内の点 (x, y) は、 y について

$$6-2\sqrt{5} \leq y \leq 2\sqrt{5}$$

を満たすことになる。したがって、直線 $y=k$ 上の格子点の数は、 $k=2, 3, 4$ の場合のみ考えればよいことになる。ここで、 $k=2, 3, 4$ の場合、それぞれ連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + k^2 \leq 20 \\ x^2 + k^2 - 4x - 12k + 20 \leq 0 \end{cases}$$

を解いた結果と、その解の区間に含まれる整数の個数を表にまとめると、以下のようになる。

k	連立不等式の解	整数の個数
2	$0 \leq x \leq 4$	5
3	$2-\sqrt{11} \leq x \leq \sqrt{11}$	5
4	$-2 \leq x \leq 2$	5
計		15

したがって、 $a=-4$ のとき $n(a)=15$ であることがわかる。

(ii)

まず、 $n(a)$ が満たす性質について調べる。

$a \geq 0$ のとき、 $n(a) \geq 60$ である ・・・①

$a \leq 0$ のとき、 $n(a) \geq 9$ である ・・・②

$a_1 \leq a_2 \leq 0$ ならば $E_{a_1} \subset E_{a_2}$ 、 $n(a_1) \leq n(a_2)$ である ・・・③

ここで $n(a)$ は領域 E_a 内の点、つまり連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 20 \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 + a(x+3y-10) \leq 20 \quad \text{・・・④}$$

を満たす整数の組 (x, y) の個数であることに注意する。

[1] 性質①を示す

領域 D の直線 PQ より下側の部分、つまり連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 20 \quad \text{かつ} \quad x+3y-10 < 0 \quad \text{・・・⑤}$$

が表す領域を F とおく。 $a \geq 0$ のとき、実数の組 (x, y) について⑤ $\Rightarrow$ ④を満たすから、 $F \subset E_a$ である。よって、 $n(a)$ は領域 F 内の格子点の個数以上である。ここで、領域 F 内の格子点の個数は、(i)の図より

$$(5+7+9+9+9+9+7+5)-(6+3)=60$$

であるから、 $n(a) \geq 60$ であることがわかる。

[2] 性質②を示す

領域 D の直線 PQ より上側の部分および線分 PQ、つまり連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 20 \quad \text{かつ} \quad x+3y-10 \geq 0 \quad \text{・・・⑥}$$

が表す領域を G とおく。 $a \leq 0$ のとき、実数の組 (x, y) について⑥ $\Rightarrow$ ④を満たすから、 $G \subset E_a$ である。よって、 $n(a)$ は領域 G 内の格子点の個数以上である。ここで、領域 G 内の格子点の個数は、(i)の図より

$$6+3=9$$

であるから、 $n(a) \geq 9$ であることがわかる。

[3] 性質③を示す

領域 E_a は F, G によって、 $E_a = (E_a \cap F) \cup (E_a \cap G)$ 、 $(E_a \cap F) \cap (E_a \cap G) = \phi$ と分割されるから、以下 E_a を $E_a \cap F$ の部分と $E_a \cap G$ の部分に分けて考える。 $a \leq 0$ のとき、[2]より $E_a \cap G = G$

である。また、 $x+3y-10 < 0$ のとき、④を変形すると

$$x^2 + y^2 \leq 20 \quad \text{かつ} \quad a \geq \frac{20-x^2-y^2}{x+3y-10}$$

となるから、 $a_1 \leq a_2$ のとき

$$a_1 \geq \frac{20-x^2-y^2}{x+3y-10} \Rightarrow a_2 \geq \frac{20-x^2-y^2}{x+3y-10}$$

が成立する。したがって、 $E_{a_1} \subset E_{a_2}$ となり、 $n(a_1) \leq n(a_2)$ が示された。

それでは、ここからは性質①、②、③を用いて $n(a)$ が最小値9をとるための必要十分条件は $a < -11$ であることを示す。(i)の結果より $n(-4)=15$ であるが、領域 $E_{-4} \cap F$ 内の6つの点について、それぞれ E_a に含まれる条件を表にまとめると、以下のようになる。

$E_{-4} \cap F$ 内の点	a についての条件
$(-1, 3)$	$a \geq -5$
$(0, 2)$	$a \geq -4$
$(0, 3)$	$a \geq -11$
$(1, 2)$	$a \geq -5$
$(2, 2)$	$a \geq -6$
$(3, 2)$	$a \geq -7$

よって、この結果と①、②、③より、 $n(a)$ の値は以下の表のようにまとめられる。

a の範囲	$n(a)$ の値
$0 \leq a$	60 以上
$-11 \leq a \leq 0$	10 以上
$n(a) < -11$	9

したがって、 $12 \leq n(a) < 14$ となるための必要十分条件は $-6 \leq a < -5$ であることがわかる。

(iii)

(ii)における考察より、 $n(a)$ の値について詳しくまとめると、以下の表のようになる。

a の範囲	$n(a)$ の値
$0 \leq a$	60 以上
$-4 \leq a \leq 0$	15 以上
$-5 \leq a < -4$	14
$-6 \leq a < -5$	12
$-7 \leq a < -6$	11
$-11 \leq a < -7$	10
$n(a) < -11$	9

したがって、 $12 \leq n(a) < 14$ となるための必要十分条件は $-6 \leq a < -5$ であることがわかる。