

1

〔解答〕

(1)	ア	イ		
	-31	89		
(2)	ウ	エ	オ	カ
	4	2	-2	1
	キ			
	25			

〔解説〕

(1)

放物線と x 軸の共有点の x 座標は

$$0 = (x - 29)^2 - 3600$$

を満たすから、

$$\begin{aligned} (x - 29)^2 - 3600 &= (x - 29)^2 - 60^2 \\ &= (x - 29 - 60)(x - 29 + 60) \\ &= (x - 89)(x + 31) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = -31, 89$$

となる。

(2)(i)

 $x + y = 1$ より、 $y = 1 - x$ であることに注意して

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{x + y}{xy} \\ &= \frac{1}{xy} \\ &= \frac{1}{x(1 - x)} \\ &= \frac{1}{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

と変形できる。分母が最大値を取るとき、 A は最小値を取る。 $0 < x < 1$ の範囲では $x = \frac{1}{2}$ のと

きに、分母は最大値を取り、そのとき

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\frac{1}{4}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(ii)

(i) より、 $A = \frac{1}{xy}$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2 y^2} \\ &= 1 + \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 y^2} \\ &= 1 + \frac{(x + y)^2 - 2xy + 1}{x^2 y^2} \\ &= \frac{2}{x^2 y^2} - \frac{2}{xy} + 1 \quad (\because x + y = 1) \\ &= 2A^2 - 2A + 1 \end{aligned}$$

となる。

(iii)

$$\begin{aligned} B &= 2A^2 - 2A + 1 \\ &= 2\left(A - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。また、(i) より

$$A = \frac{1}{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

であり、 $0 < x < 1$ のとき

$$0 < -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

より、 A の取り得る範囲は $A \geq 4$ である。したがって、 B は最小値を $A = 4$ のとき取り、

$$\begin{aligned} B &= 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 1 \\ &= 25 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

- (1) B, G (2) E

〔解説〕

(1)

選択肢と条件 P の関係を考えると、 A は P の裏、 B は P の対偶、 C は P の逆である。また、選択肢 F は C と同値であり、選択肢 G は B と同値である。したがって、選択肢 A, B, C, F, G の中で P であるための必要十分条件であるものは選択肢 B と G である。選択肢 D について、選んだカードのうち赤いカードには偶数、青いカードには奇数が書かれているとき、 P は真であり D は偽であることから

$$P \Rightarrow D$$

は成り立たない。また、選択肢 E は P の否定である。以上より、 P であるための必要十分条件は選択肢 B と G である。

(2)

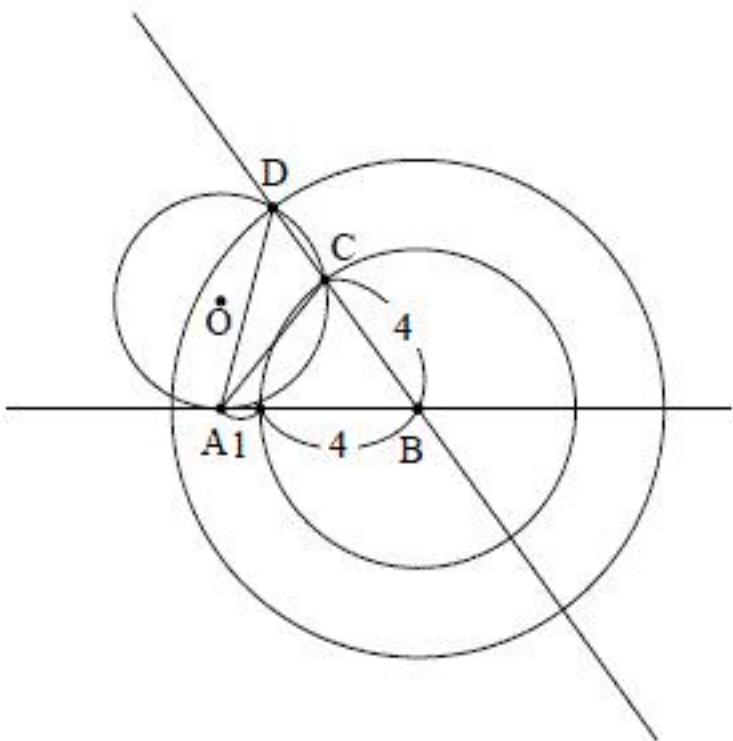
P と P の否定が同時に成り立つことはないということに注意すると、 P と A を同時に満たすようなカードの選び方が存在することから選択肢 A は P の否定ではない。ここで、(1)より選択肢 E は P の否定であり、選択肢 G は E の否定であるから(1)より選択肢 B, G は P の否定ではない。また、選択肢 E が P の否定であることを用いると、 D と E を同時に満たすようなカードの選び方が存在することから選択肢 D は P の否定ではない。さらに選択肢 F について、選んだカードのうち赤いカードと青いカードの両方に奇数だけが書かれているとき、 E と F は同時に成り立つため選択肢 F は P の否定ではない。このとき、(1)より選択肢 C も P の否定ではない。以上より、 P の否定は選択肢 E である。

3

【解答】

(1)	ク	ケ
	9	4
(2)	コ	サ
	9	8
(3)	シ	ス
	45	8
(4)	セ	ソ
	3	5
(5)	タ	
	5	

【解説】



(1)

円Oについて、方べきの定理より

$$\begin{aligned}AB^2 &= BC \cdot BD \\ \Leftrightarrow 5^2 &= 4 \cdot (4 + CD) \\ \therefore CD &= \frac{9}{4}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

CDの中点をMとすると、△OMLは∠OMC=90°の直角三角形であるから

$$OC^2 = OM^2 + CM^2$$

と表せる。OCが最小となるとき、OC²も最小となる。また、(1)より、 $CM = \frac{9}{8}$ であるから、

OM²が最小となるとき、OC²も最小となる。OM²が最小となるのは、直線BCが点Oを通るときである。このとき、OM=0であり、点Oと点Mは一致する。したがって、

$$(\text{円Oの半径最小値}) = CM = \frac{9}{8}$$

である。

(3)

△ACDの面積をSとすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (\text{点Aと直線CDの距離})$$

と表せる。したがって、(1)よりCDの値は一定であることから、△ACDの面積が最大となるのは、点Aと直線CDの距離が最大となるときである。このとき、直線ABと直線BCは垂直となり、点Aと直線CDの距離は線分ABの長さに等しい。したがって、△ACDの面積の最大値は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 5 = \frac{45}{8}$$

である。

(4)

点Cの定義より、

$$1 < AC < 9$$

である。接弦定理より、

$$\angle ADC = \angle BAC$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}\cos \angle ADC &= \cos \angle BAC \\ &= \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB} \\ &= \frac{AC^2 + 25 - 16}{2 \cdot AC \cdot 5} \\ &= \frac{1}{10} \left(AC + \frac{9}{AC} \right)\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、AC>0から相加相乗平均の関係より、

$$AC + \frac{9}{AC} \geq 2\sqrt{AC \cdot \frac{9}{AC}} = 6$$

が成り立つ。等号は、 $AC = \frac{9}{AC}$ 、すなわちAC=3のとき成り立つ。したがって、

$$\cos \angle ADC \geq \frac{1}{10} \cdot 6 = \frac{3}{5}$$

が成り立つので、cos∠ADCの最小値は $\frac{3}{5}$ となる。

(5)

△ABCの外接円の半径と円Oの半径が等しいとき、半径の大きさをRとすると、△ABCにおいて正弦定理より、

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$$

が成り立つ。また、△ACDにおいて正弦定理より、

$$2R = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$$

が成り立つ。これら2式と∠BAC=∠ADCから、

$$AC = BC = 4$$

である。したがって、△ABCにおいて余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle ABC &= \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} \\ &= \frac{5^2 + 4^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} \\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

と求まるので、△ABDにおいて余弦定理より、

$$\begin{aligned}AD^2 &= BA^2 + BD^2 - 2 \cdot BA \cdot BD \cdot \cos \angle ABC \\ &= 5^2 + \left(4 + \frac{9}{4}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \left(4 + \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{5}{8} \\ &= 25 + \frac{625}{16} - \frac{625}{16} \\ &= 25 \\ \therefore AD &= 5\end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	チ	ツ	テ	ト
	13	27	1	2
(2)	ナ	ニ	ヌ	ネ
	1	27	1	36
(3)	ノ	ハ	ヒ	フ
	5	81	1	18

【解説】

(1)

「戻す場合」では、カードの取り出し方の総数は

$$9^2=81 \text{ [通り]}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。また、「戻さない場合」ではカードの取り出し方の総数は

$${}_9P_2=72 \text{ [通り]}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。

戻す場合、 $8 \leq a+b \leq 12$ となる (a, b) の組を表にまとめると以下のようになる。

a	b	組数
1	7, 8, 9	3
2	6, 7, 8, 9	4
3	5, 6, 7, 8, 9	5
4	4, 5, 6, 7, 8	5
5	3, 4, 5, 6, 7	5
6	2, 3, 4, 5, 6	5
7	1, 2, 3, 4, 5	5
8	1, 2, 3, 4	4
9	1, 2, 3	3
計		39

よって、求める確率は $\frac{39}{81}=\frac{13}{27}$ である。

戻さない場合、 $8 \leq a+b \leq 12$ となる (a, b) の組を表にまとめると以下のようになる。

a	b	組数
1	7, 8, 9	3
2	6, 7, 8, 9	4
3	5, 6, 7, 8, 9	5
4	5, 6, 7, 8	4
5	3, 4, 6, 7	4
6	2, 3, 4, 5	4
7	1, 2, 3, 4, 5	5
8	1, 2, 3, 4	4
9	1, 2, 3	3
計		36

したがって、求める確率は $\frac{36}{72}=\frac{1}{2}$ である。

(2)

$a \leq 6$ のとき、 $ab \leq 54$ であるから $60 \leq ab \leq 70$ とならない。このことに注意して、 $60 \leq ab \leq 70$ となる (a, b) の組を表にまとめると、戻す場合は以下のようになる。

a	b	組数
1, 2, 3, 4, 5, 6	なし	0
7	9	1
8	8	1
9	7	1
計		3

よって、求める確率は $\frac{3}{81}=\frac{1}{27}$ である。

戻さない場合は以下のようになる。

a	b	組数
1, 2, 3, 4, 5, 6	なし	0
7	9	1
8	なし	0
9	7	1
計		2

したがって、求める確率は $\frac{2}{72}=\frac{1}{36}$ である。

(3)

$$60 \leq ab+a+b \leq 70$$

$$\Leftrightarrow 61 \leq ab+a+b+1 \leq 71$$

$$\Leftrightarrow 61 \leq (a+1)(b+1) \leq 71$$

と変形できる。また、 $a \leq 5$ のとき $(a+1)(b+1) \leq 60$ であるから、これを満たさない。このことに注意して $61 \leq (a+1)(b+1) \leq 71$ となる (a, b) の組を表にまとめると、戻す場合は以下のようになる。

a	b	組数
1, 2, 3, 4, 5	なし	0
6	8, 9	2
7	7	1
8	6	1
9	6	1
計		5

よって、求める確率は $\frac{5}{81}$ である。

戻さない場合は以下のようになる。

a	b	組数
1, 2, 3, 4, 5	なし	0
6	8, 9	2
7	なし	0
8	6	1
9	6	1
計		4

したがって、求める確率は $\frac{4}{72}=\frac{1}{18}$ である。