

1

【解答】

(1) ア 1 イ 3 ウ 4 エ -5

(2) オ 4 カ 19 キ 11

【解説】

(1)

$f(x), g(x)$ が

$$\begin{cases} \int_1^x f(t) dt = xg(x) - 2ax + 2 & \dots \textcircled{1} \\ g(x) = x^2 - x \int_0^1 f(t) dt - 3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

を満たしているとき、

$$k = \int_0^1 f(t) dt \quad \dots \textcircled{3}$$

とおくと、②より $g(x)$ は

$$g(x) = x^2 - kx - 3$$

と表せる。これを①に代入すると

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt &= x(x^2 - kx - 3) - 2ax + 2 \\ &= x^3 - kx^2 - (2a+3)x + 2 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となることから、上式に $x=1$ を代入して

$$\begin{aligned} 0 &= -2a - k \\ \Leftrightarrow k &= -2a \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

が得られる。また、④の両辺を x で微分すると

$$f(x) = 3x^2 - 2kx - (2a+3) \quad \dots \textcircled{6}$$

となることから、これを③に代入すると

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 \{3x^2 - 2kx - (2a+3)\} dx \\ &= \left[x^3 - kx^2 - (2a+3)x \right]_0^1 \\ &= -2a - k - 2 \\ \Leftrightarrow k &= -a - 1 \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、⑤、⑦より

$$\begin{cases} a = 1 \\ k = -2 \end{cases}$$

となり、⑥より

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} c(n) &= \frac{3n^2 + 174n + 231}{n^2 + 3n + 2} \\ &= 3 + \frac{165n + 225}{n^2 + 3n + 2} \\ &= 3 + \frac{165n + 225}{(n+1)(n+2)} \\ &= 3 + \frac{60}{n+1} + \frac{105}{n+2} \end{aligned}$$

であるから、

$$d(n) = \frac{60}{n+1} + \frac{105}{n+2}$$

とおくと、 $c(n)$ が整数であることは $d(n)$ が整数であることに等しい。 $\frac{60}{n+1}$ と $\frac{105}{n+2}$ がいずれ

も整数であるとき $d(n)$ も整数である。一方で、 $\frac{60}{n+1}$ が整数でないとき 60 は $n+1$ で割り切れないため、

$$\begin{aligned} d(n) &= \frac{60}{n+1} + \frac{105}{n+2} \\ &= \frac{60(n+2) + 105(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{165(n+1) + 60}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

の分子は $n+1$ で割り切れず $d(n)$ は整数ではない。 $\frac{105}{n+2}$ が整数でないときも同様に

$$\begin{aligned} d(n) &= \frac{60(n+2) + 105(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{165(n+2) - 105}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

の分子が $n+2$ で割り切れないことから $d(n)$ は整数ではない。したがって、 $\frac{60}{n+1}$ と $\frac{105}{n+2}$ が同

時に整数となるような自然数 n を求めればよい。 $\frac{60}{n+1}$ が整数となるのは n が

$$\begin{aligned} n+1 &= 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 \\ \Leftrightarrow n &= 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11, 14, 19, 29, 59 \end{aligned}$$

となるときであり、このうち $\frac{105}{n+2}$ が整数となるものは

$$n = 1, 3, 5, 19$$

の4つである。また、

$$n^* = 19$$

であるから

$$\begin{aligned} c(n^*) &= c(19) \\ &= 3 + \frac{60}{20} + \frac{105}{21} \\ &= 11 \end{aligned}$$

である。

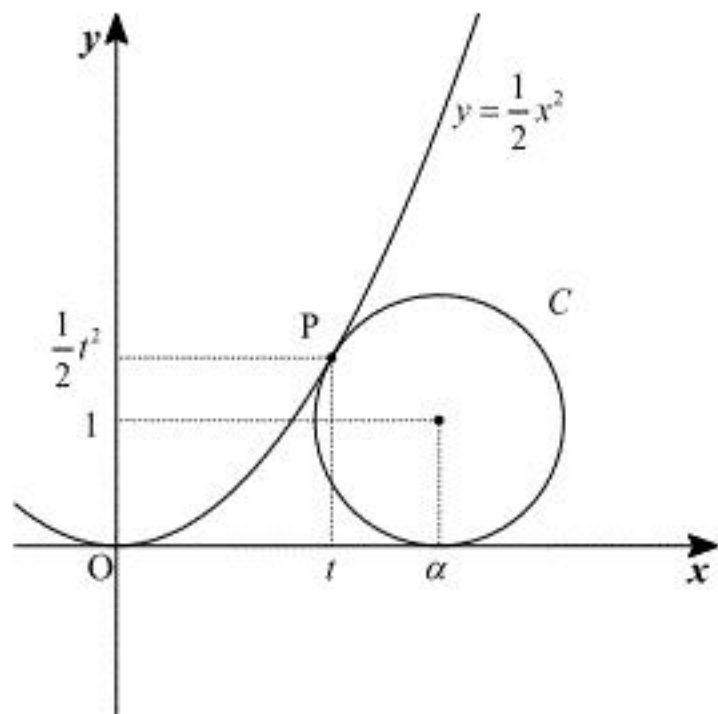
2

【解答】

- (1) ク 1 ケ 2
 (2) コ 3 サ 2 シ 3
 (3) ス 3 セ -3 ソ 2
 (4) タ 9 チ 8 ツ 3 テ -1 ト 3

【解説】

(1)



放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ について $y' = x$ が成り立つので、接線 ℓ の傾きは t である。また、円 C の中心を点 C とすると、接線 ℓ と直線 CP は直交し、直線 CP は y 軸と平行ではないので、

$$\begin{aligned} t \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}t^2}{\alpha - t} &= -1 \\ \Leftrightarrow t - \frac{1}{2}t^3 &= t - \alpha \\ \therefore \alpha &= \frac{1}{2}t^3 \end{aligned}$$

であることが分かる。

(答) $\alpha = \frac{1}{2}t^3$

(2)

放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ について $y' = x$ が成り立つので、接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= t(x - t) + \frac{1}{2}t^2 \\ &= tx - \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

と表される。また、 $C(\alpha, 1)$ であるから、円 C が x 軸に接しているとき、円 C の半径 r は

$$r = 1$$

である。したがって、接線 ℓ と点 C との距離が円 C の半径に等しいことから、点と直線の距離の公式より

$$\frac{\left| \frac{1}{2}t^2 - \alpha t + 1 \right|}{\sqrt{t^2 + 1}} = 1$$

が成り立つので、 $t^2 + 1 > 0$ より、両辺に $\sqrt{t^2 + 1}$ をかけて両辺 2 乗すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}t^2 - \alpha t + 1 \right)^2 &= t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 1 \right)^2 &= t^2 + 1 \left(\because \alpha = \frac{1}{2}t^3 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}t^8 - \frac{1}{2}t^6 - \frac{3}{4}t^4 + t^2 + 1 &= t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}t^4 (t^4 - 2t^2 - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}t^4 (t^2 + 1)(t^2 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。 $\alpha > 0$ より、 $t > 0$ であるから、

$$t = \sqrt{3}$$

を得るので、

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

と求まる。

(答) $\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

(3)

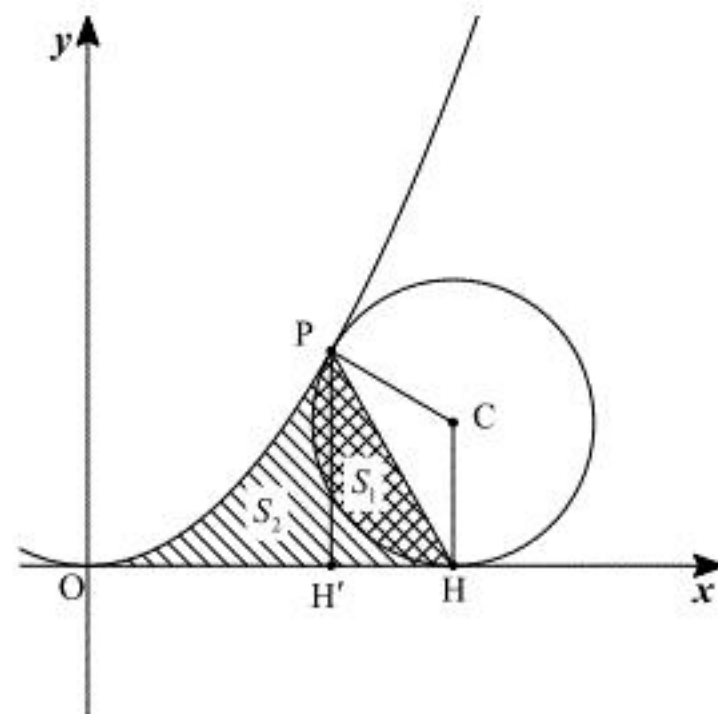
(2)より、 ℓ の方程式は、

$$y = \sqrt{3}x - \frac{3}{2}$$

である。

(答) $y = \sqrt{3}x - \frac{3}{2}$

(4)



点 P から x 軸におろした垂線の足を H' とする。弧 PH のうち短い方と線分 PH で囲まれる部分の面積を S_1 、線分 PH と放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ および x 軸とで囲まれる部分の面積を S_2 とすると、求める面積は $S_2 - S_1$ である。

$$P\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, 1\right), H\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, 0\right), H'(\sqrt{3}, 0)$$

であるから、

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CP} &= -\frac{1}{2} \\ |\overrightarrow{CH}| &= |\overrightarrow{CP}| = 1 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \cos \angle HCP &= \frac{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CH}| |\overrightarrow{CP}|} = -\frac{1}{2} \\ \therefore \angle HCP &= \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

と求まる。よって、

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \cdot 1 \cdot \pi \cdot \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}x^2 dx + \frac{1}{2} \cdot HH' \cdot H'P \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{8}\sqrt{3} \\ &= \frac{7}{8}\sqrt{3} \end{aligned}$$

と計算できるから、求める面積は、

$$\frac{7}{8}\sqrt{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$$

となる。

3

【解答】

- (1) ナ 1 ニ 3 ノ -1 ネ 0
 (2) ノ 3 ハ 4 ヒ 3 フ 2
 (3) ヘ 2 ホ 3 マ 3 ミ 2

【解説】

(1)

$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $B(0, 0)$ であるから, $|\overline{BP}| = 1$ で一定となる。また, $|\overline{AP}|$ は $P(-1, 0)$ のときに最大値 $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ をとり, このとき $\overline{AP}$ と $\overline{BP}$ のなす角は 0 なので $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ の内積は最大となる。従って,

$$\begin{aligned} M_t &= |\overline{AP}| |\overline{BP}| \cos 0 \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

であり, P_t の座標は $(-1, 0)$ である。

(2)

$0 \leq u < 2\pi$ を満たす実数 u を用いて, P の座標を $(\cos u, \sin u)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= (\cos u - t, \sin u) \\ \overline{BP} &= (\cos u, \sin u - 1 + \sqrt{3}t) \end{aligned}$$

となるので, 内積は,

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{BP} &= (\cos u - t) \cos u + \sin u (\sin u - 1 + \sqrt{3}t) \\ &= 1 - \{t \cos u + (1 - \sqrt{3}t) \sin u\} \\ &= 1 - \sqrt{t^2 + (1 - \sqrt{3}t)^2} \sin(u + \alpha) \\ &= 1 - \sqrt{4t^2 - 2\sqrt{3}t + 1} \sin(u + \alpha) \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで, α は $0 \leq \alpha < 2\pi$ かつ,

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{4t^2 - 2\sqrt{3}t + 1}} \\ \cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{3}t}{\sqrt{4t^2 - 2\sqrt{3}t + 1}} \end{cases}$$

を満たす実数である。これより, 内積が最大となるのは,

$$\sin(u + \alpha) = -1$$

のときであり, そのときの M_t の値は,

$$\begin{aligned} M_t &= 1 + \sqrt{4t^2 - 2\sqrt{3}t + 1} \\ &= 1 + \sqrt{4\left(t - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

である。以上より, $t \geq 0$ の範囲で M_t が最小となるのは $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のときであり, その値は,

$$\begin{aligned} M_t &= 1 + \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であることが分かる。

(3)

$\overline{AP} \cdot \overline{BP}$ は,

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{BP} &= (\overline{OP} - \overline{OA}) \cdot (\overline{OP} - \overline{OB}) \\ &= |\overline{OP}|^2 + \overline{OA} \cdot \overline{OB} - (\overline{OA} + \overline{OB}) \cdot \overline{OP} \end{aligned}$$

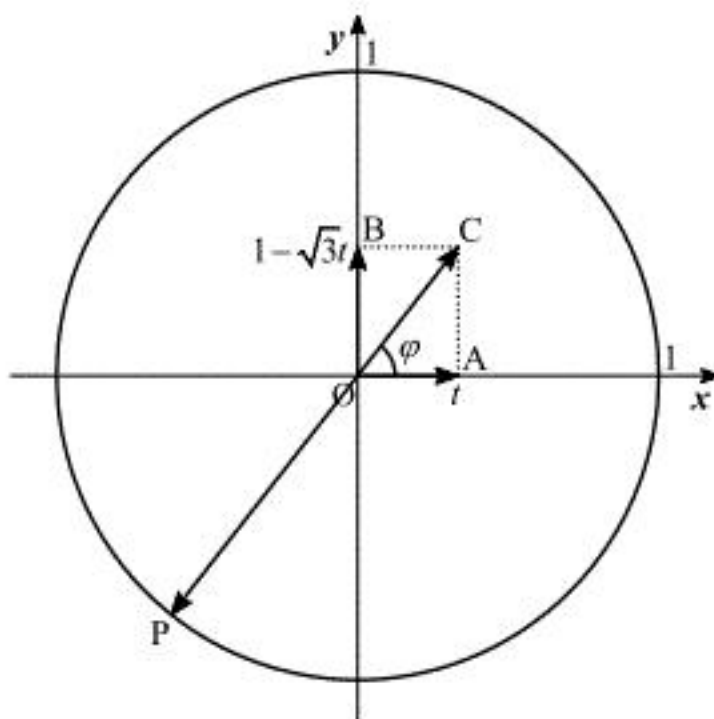
と変形できる。ここで,

$$\begin{aligned} |\overline{OP}|^2 &= 1 \\ \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= 0 \end{aligned}$$

であるから, $(\overline{OA} + \overline{OB}) \cdot \overline{OP}$ が最小値をとるときに $\overline{AP} \cdot \overline{BP}$ は最大値をとる。今,

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$$

とおくと, $\overline{OC} \cdot \overline{OP}$ が最小値をとるということは, $\overline{OC}$ と $\overline{OP}$ が平行で向きが反対であるということであるから, 4 点 A, B, P, C は以下の図のようになっている。



ベクトル $\overline{OC}$ が x 軸正の方向となす角を φ とすると, $\overline{OC}$ と $\overline{OP}$ が平行で向きが反対であることから,

$$\theta = \varphi + \pi$$

が成り立つ。ただし, $t \geq 0$ であることから, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ である。 $t \neq 0$ のとき,

$$\tan \varphi = \frac{1 - \sqrt{3}t}{t}$$

について, t の関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1 - \sqrt{3}t}{t}$$

とすると,

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

であるから, $f(t)$ は t の単調減少関数である。従って,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} f(t) &= \infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t} - \sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} &< \tan \varphi < \infty \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} &< \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (\because -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \\ \therefore \frac{2}{3}\pi &< \theta < \frac{3}{2}\pi \quad (\because \theta = \varphi + \pi) \end{aligned}$$

を得る。また, $t = 0$ のときは, $C(0, 1)$ であるから $P(0, -1)$ であり, このとき,

$$\theta = \frac{3}{2}\pi$$

である。以上より, 求める θ の範囲は,

$$\frac{2}{3}\pi < \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

である。