

【解答】

(1)	(i)	ア	イ	ウ					
		-1	6	1					
	(ii)	エ	オ						
		2	4						
(2)		カ	キ	ク	ケ	コ			
		-2	-1	5	9	2			

【解説】

(1)(i)

2 次関数 $f(x)$ を $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおく。この導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = 2ax + b$ であるから、放物線 $C: y = f(x)$ が点 $P(1, 6)$ で直線 $\ell: y = 4x + 2$ に接するという条件から

$$\begin{cases} a + b + c = 6 & \dots \text{①} \\ 2a + b = 4 & \dots \text{②} \end{cases}$$

が得られる。また、 C が点 $(0, 1)$ を通るという条件から

$$c = 1 \quad \dots \text{③}$$

が得られる。よって、①、②、③を連立することにより

$$a = -1, b = 6, c = 1$$

であることがわかるから、 $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ と求まる。

(ii)

C が点 P で ℓ と接するとき、①、②より b, c は a を用いて

$$\begin{cases} b = 4 - 2a \\ c = a + 2 \end{cases}$$

と表せる。このとき、2 次関数 $f(x)$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + (4 - 2a)x + (a + 2) \\ &= a \left(x - \frac{a - 2}{a} \right)^2 - \frac{(a - 2)^2}{a} + (a + 2) \quad (\because a \neq 0) \\ &= a \left(x - \frac{a - 2}{a} \right)^2 + \frac{6a - 4}{a} \end{aligned}$$

となるから、放物線 C の頂点の座標は $\left(\frac{a - 2}{a}, \frac{6a - 4}{a} \right)$ である。ここで、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = \frac{a - 2}{a} \\ y = \frac{6a - 4}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{a} \\ y = 6 - \frac{4}{a} \end{cases} \\ &\Rightarrow y = 2x + 4 \end{aligned}$$

となるから、 C の頂点は直線 $y = 2x + 4$ 上に存在することがわかる。

(2)

α, β は 2 次方程式 $x^2 - 4x + 9 = 0$ の解であり、 $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(\beta)$ であることから、2 次方程式の解の公式より

$$\alpha = 2 + \sqrt{5}i, \beta = 2 - \sqrt{5}i \quad \dots \text{④}$$

であり、解と係数の関係より

$$\alpha\beta = 9 \quad \dots \text{⑤}$$

であることがわかる。同様にして、 α', β' は 2 次方程式 $x^2 - 2x + 2 = 0$ の解であり、 $\text{Im}(\alpha') > \text{Im}(\beta')$ であることから

$$\alpha' = 1 + i, \beta' = 1 - i \quad \dots \text{⑥}$$

$$\alpha'\beta' = 2 \quad \dots \text{⑦}$$

であることがわかる。よって、④、⑤、⑥、⑦より 2 数 $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}$ の和、積は

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} &= \frac{\alpha\beta' + \alpha'\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{(2 + \sqrt{5}i)(1 - i) + (2 - \sqrt{5}i)(1 + i)}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta}{\beta'} &= \frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となるから、この 2 数 $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}$ を解とする 2 次方程式のうち、 x^2 の係数が 1 であるものは

$$\begin{aligned} &\left(x - \frac{\alpha}{\alpha'} \right) \left(x - \frac{\beta}{\beta'} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\beta}{\beta'} \right) x + \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta}{\beta'} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (-2 - \sqrt{5})x + \frac{9}{2} = 0 \end{aligned}$$

である。

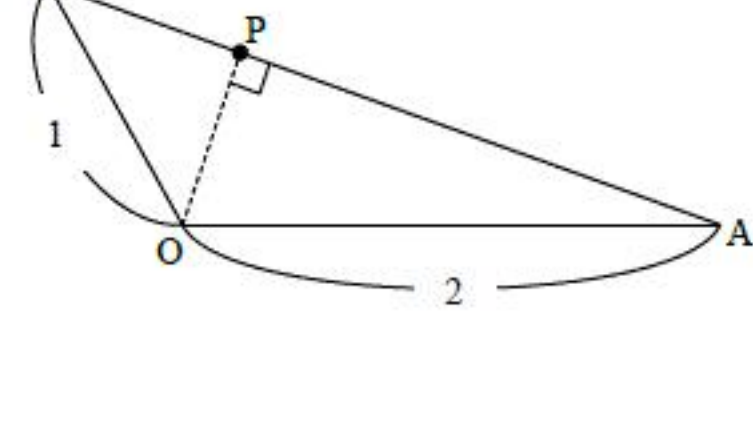
2

【解答】

(1)	サ	21	シ	7						
(2)	ス	3	セ	7	ソ	7	タ	2	チ	-4
	ツ	7	テ	7	ト	-1	ナ	7	ニ	7
	ヌ	16	ネ	3	ノ	4	ハ	7		
(3)	ヒ	15	フ	3	ヘ	5	ホ	6		

【解説】

(1)



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと、点 P は直線 $\overline{AB}$ 上の点であるから、 $\overrightarrow{OP}$ は実数 s を用いて $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$

と表せる。 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= \{s\vec{a} + (1-s)\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -s|\vec{a}|^2 + (2s-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-s)|\vec{b}|^2 \\ &= -7s+2\end{aligned}$$

であるから、 $OP \perp AB$ のとき

$$\begin{aligned}-7s+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

となる。このとき、 $AB > AP$ は確かに成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\therefore AB = \sqrt{7}$$

となるので、

$$\begin{aligned}AP &= (1-s) \cdot AB \\ &= \frac{5\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}OP &= \sqrt{OA^2 - AP^2} \\ &= \sqrt{4 - \left(\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{7}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$\triangle OBP$ が二等辺三角形であるとき、等しい2辺の定め方により場合分けできる。

[1] $OB = OP$ のとき

$$\begin{aligned}OP^2 &= OB^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

である。点 O から直線 $\overline{AB}$ に下した垂線の足を M とすると、M は(1)における点 P に一致するため

$$\begin{aligned}BM &= AB - AM \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

である。対称性より

$$BM = PM$$

であるから、

$$\begin{aligned}BP &= 2BM \\ &= \frac{4\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

より、AP の長さは

$$\begin{aligned}AP &= AB - BP \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

となる。

[2] $OB = PB$ のとき

$PB = 1$ であるから

$$\begin{aligned}AP &= AB - BP \\ &= \sqrt{7} - 1\end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned}\cos \angle OBP &= \frac{BM}{OB} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle OBP$ について余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}OP^2 &= OB^2 + PB^2 - 2 \cdot OB \cdot PB \cos \angle OBP \\ &= 1+1-2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ &= 2 - \frac{4\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

となる。

[3] $PB = PO$ のとき

[1]の場合における点 P の位置を P' とすると、

$$\angle OBP = \angle P'BO \quad (\text{共通})$$

$$\angle POB = \angle PBO$$

$$= \angle P'BO$$

$$OP : OP' = OB : P'B$$

$$\Leftrightarrow OP : 1 = 1 : \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\Leftrightarrow OP = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Leftrightarrow OP^2 = \frac{7}{16}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}BP &= OP \\ &= \frac{\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}AP &= AB - BP \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

である。

(3)

実数 t, u を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = t\vec{a} + u\vec{b}$$

とおくと、QC が平面 α に垂直であることより

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{QC} = 0$$

が成り立つから、題意より

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot (t\vec{a} + u\vec{b}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4t - u = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。また、題意より

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \cdot (t\vec{a} + u\vec{b}) = 1$$

$$\Leftrightarrow -t + u = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。①, ②より

$$t = \frac{2}{3}, u = \frac{5}{3}$$

であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}|^2 &= \left| \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{20}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{25}{9}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}CQ &= \sqrt{OC^2 - OQ^2} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{3}\end{aligned}$$

である。 $\triangle OAB$ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OM \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であるから、四面体 OABC の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot S \cdot CQ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{6}\end{aligned}$$

となる。

3

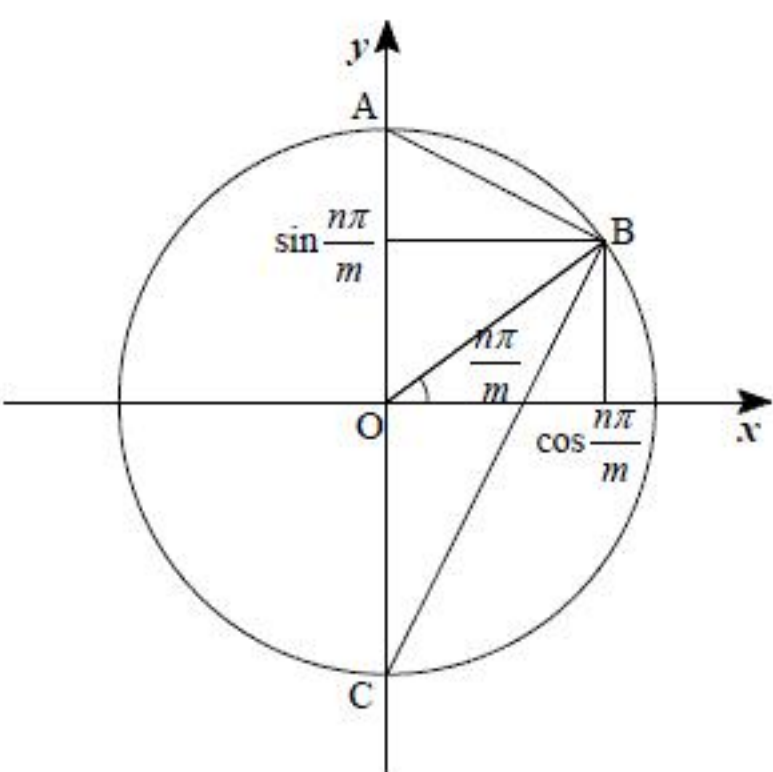
〔解答〕

(1)	マ								
	7								
(2)	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ
	-1	5	4	2	2	1	18	1	12

〔解説〕

(1)

3点A, B, Cを座標平面上に図示すると、以下の図のようになる。



上図より△ABCの面積 S を求めると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left| \cos \frac{n\pi}{m} \right| = \left| \cos \frac{n\pi}{m} \right|$$

となる。ここで、 m の値により場合分けを行う。

[1] $m=1$ のとき

n は1から6までの自然数であるから、

$$S = |\cos n\pi| = 1$$

となる。

[2] $m=2$ のとき

$$\left| \cos \frac{\pi}{2} \right| = \left| \cos \frac{3\pi}{2} \right| = \left| \cos \frac{5\pi}{2} \right| = 0$$

$$\left| \cos \frac{2\pi}{2} \right| = \left| \cos \frac{4\pi}{2} \right| = \left| \cos \frac{6\pi}{2} \right| = 1$$

であるから、 S は n が奇数のとき0をとり、 n が偶数のとき1をとる。

[3] $m=3$ のとき

$$\left| \cos \frac{\pi}{3} \right| = \left| \cos \frac{2\pi}{3} \right| = \left| \cos \frac{4\pi}{3} \right| = \left| \cos \frac{5\pi}{3} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\left| \cos \frac{3\pi}{3} \right| = \left| \cos \frac{6\pi}{3} \right| = 1$$

であるから、 S は $\frac{1}{2}$ または1をとる。

[4] $m=4$ のとき

$$\left| \cos \frac{\pi}{4} \right| = \left| \cos \frac{3\pi}{4} \right| = \left| \cos \frac{5\pi}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left| \cos \frac{2\pi}{4} \right| = \left| \cos \frac{6\pi}{4} \right| = 0$$

$$\left| \cos \frac{4\pi}{4} \right| = 1$$

であるから、 S は $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ のいずれかの値をとる。

[5] $m=5$ のとき

$$\left| \cos \frac{\pi}{5} \right| = \left| \cos \frac{4\pi}{5} \right| = \left| \cos \frac{6\pi}{5} \right|$$

$$\left| \cos \frac{2\pi}{5} \right| = \left| \cos \frac{3\pi}{5} \right|$$

$$\left| \cos \frac{5\pi}{5} \right| = 1$$

であるから、 S は $\left| \cos \frac{\pi}{5} \right|, \left| \cos \frac{2\pi}{5} \right|, 1$ のいずれかの値をとる。

[6] $m=6$ のとき

$$\left| \cos \frac{\pi}{6} \right| = \left| \cos \frac{5\pi}{6} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left| \cos \frac{2\pi}{6} \right| = \left| \cos \frac{4\pi}{6} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\left| \cos \frac{3\pi}{6} \right| = 0$$

$$\left| \cos \frac{6\pi}{6} \right| = 1$$

であるから、 S は $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ のいずれかの値をとる。

以上[1]から[6]より、 S がとりうる値は、

$$0, \cos \frac{2\pi}{5}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{5}, 1$$

の7通りである。

(2)

(1)の結果より、 S がとりうる値は、

$$0, \cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{6}, 1$$

とも書ける。ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $\cos \theta$ が単調に減少することを利用すると、

$$0 < \cos \frac{2\pi}{5} < \cos \frac{\pi}{3} < \cos \frac{\pi}{4} < \cos \frac{\pi}{5} < \cos \frac{\pi}{6} < 1$$

となるから、

$$s_2 = \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$s_4 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。ここで、 $\alpha = \frac{\pi}{5}$ とおき、

$$\cos 2\alpha = -\cos 3\alpha$$

が成り立つことを利用すると、2倍角および3倍角の公式より、

$$2\cos^2 \alpha - 1 = -4\cos^3 \alpha + 3\cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\cos \alpha + 1)(4\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha - 1) = 0$$

$$\therefore \cos \alpha = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

となるが、 $0 < \alpha = \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$ より $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \alpha < 1$ であるから、

$$\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore s_2 = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

となる。また、(1)の場合分けより、 $S = s_2$ となるのは

$$(m, n) = (5, 2), (5, 3)$$

となる各場合であり、 $S = s_4$ となるのは

$$(m, n) = (4, 1), (4, 3), (4, 5)$$

となる各場合である。したがって、 $S = s_k$ となる確率を $P(s_k)$ とおくと、 (m, n) の組み合わせ

が 6^2 通り存在することから

$$P(s_2) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

$$P(s_4) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

となる。