

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	36	17	20	35
(2)	あ	い	う	
	(b)	(c)	(d)	

【解説】

(1)

与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} < \log_{10} 7 < \frac{6}{7} \\ \Leftrightarrow 35 < 42 \log_{10} 7 < 36 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 10^{35} < \log_{10} 7^{42} < \log_{10} 10^{36}\end{aligned}$$

となるため、

$$10^{35} < 7^{42} < 10^{36}$$

が成り立つ。以上より、 7^{42} は 36 桁の整数である。また、与えられた式 $7^2 < 50$ の両辺について、常用対数を取ると、

$$\begin{aligned}7^2 &< 50 \\ \Leftrightarrow 2 \log_{10} 7 &< \log_{10} 50 \\ \Leftrightarrow 2 \log_{10} 7 &< \log_{10} \frac{100}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \log_{10} 7 &< \log_{10} 100 - \log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow 2 \log_{10} 7 &< 2 - \log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 7 &< 1 - \frac{1}{2} \log_{10} 2\end{aligned}$$

となる。 $\log_{10} 2 > \frac{3}{10}$ であるから、

$$\begin{aligned}\log_{10} 7 &< 1 - \frac{1}{2} \log_{10} 2 < 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 7 &< 1 - \frac{1}{2} \log_{10} 2 < \frac{17}{20}\end{aligned}$$

と変形できるため、

$$\log_{10} 7 < \frac{17}{20}$$

であることがわかる。これより、

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} < \log_{10} 7 &< \frac{17}{20} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{6} \cdot 41 &< 41 \log_{10} 7 < \frac{17}{20} \cdot 41 \\ \Leftrightarrow \frac{205}{6} &< \log_{10} 7^{41} < \frac{697}{20}\end{aligned}$$

となり、

$$34 < \frac{205}{6} < 35, 34 < \frac{697}{20} < 35$$

より、

$$34 < \log_{10} 7^{41} < 35$$

が得られるため、 7^{41} は 35 桁の整数である。

(2)

 $\log_{10} 15$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\log_{10} 15 &= \log_{10} (3 \cdot 5) \\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} 5 \\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= 0.4771 + 1 - 0.3010 \\ &= 1.1761\end{aligned}$$

となるため、 $\log_{10} 15$ に最も近い値は 1.18 である。また、 $\log_{10} \frac{50}{3}$, $\log_{10} \frac{160}{9}$ をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned}\log_{10} \frac{50}{3} &= \log_{10} \frac{10^2}{2 \cdot 3} \\ &= 2 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3 \\ &= 2 - 0.3010 - 0.4771 \\ &= 1.2219 \\ \log_{10} \frac{160}{9} &= \log_{10} \frac{10 \cdot 2^4}{3^2} \\ &= 1 + 4 \log_{10} 2 - 2 \log_{10} 3 \\ &= 1 + 4 \cdot 0.3010 - 2 \cdot 0.4771 \\ &= 1.2498\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\log_{10} \frac{50}{3} &< \log_{10} 17 < \log_{10} \frac{160}{9} \\ \Leftrightarrow 1.2219 &< \log_{10} 17 < 1.2498\end{aligned}$$

が成り立つため、 $\log_{10} 17$ に最も近い値は 1.23 である。さらに、 $\log_{10} 18$, $\log_{10} 20$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\log_{10} 18 &= \log_{10} (2 \cdot 3^2) \\ &= \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 \\ &= 0.3010 + 2 \cdot 0.4771 \\ &= 1.2552 \\ \log_{10} 20 &= \log_{10} (10 \cdot 2) \\ &= \log_{10} 10 + \log_{10} 2 \\ &= 1.3010\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\log_{10} 18 &< \log_{10} 19 < \log_{10} 20 \\ \Leftrightarrow 1.2552 &< \log_{10} 19 < 1.3010\end{aligned}$$

が成り立つため、 $\log_{10} 19$ に最も近い値は 1.28 である。

【解答】

(1)	オ	カ	キ			
	7	-8	3			
(2)	ク	ケ				
	1	9				
(3)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
	1	6	3	2	3	2

【解説】

(1)

三角関数の3倍角の公式を用いて $f(x)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + a \sin 3x \\ &= \sin x + a(3\sin x - 4\sin^3 x) \\ &= (1+3a)\sin x - 4a\sin^3 x \end{aligned}$$

となる。この式に $a=2$ を代入すると、

$$f(x) = 7\sin x - 8\sin^3 x$$

と求まる。

(2)

 $\sin x = t$ とおくと、 t の範囲は $-1 \leq t \leq 1$ である。

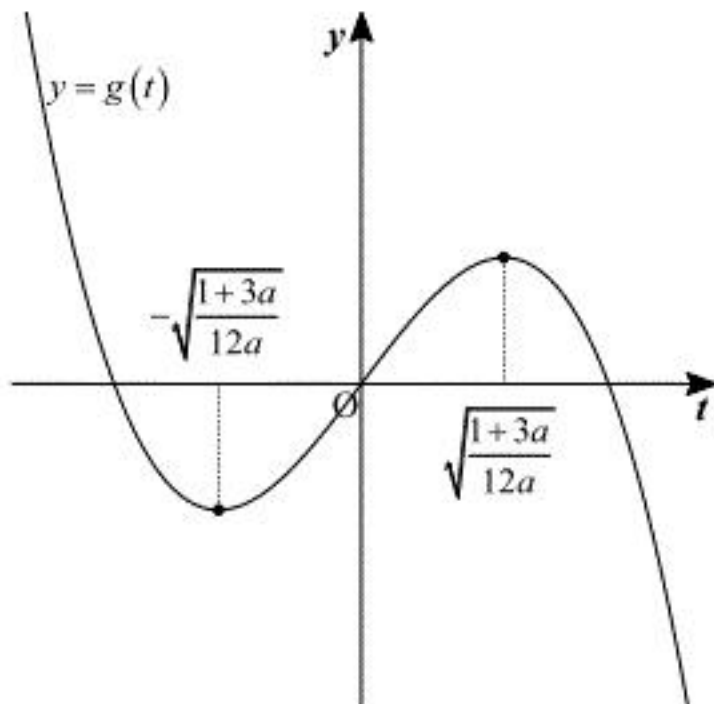
$$f(x) = -4at^3 + (1+3a)t$$

と表される。ここで $g(t) = -4at^3 + (1+3a)t$ とおく。 $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $t=1$ となるため、 $-1 \leq t \leq 1$ の範囲において $t=1$ のときに $g(t)$ が最大となる a の範囲を求めればよい。 $g(t)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= -12at^2 + 1 + 3a \\ &= -12a\left(t^2 - \frac{1+3a}{12a}\right) \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となるため、 $g(t)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{1+3a}{12a}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1+3a}{12a}}$	$\cdots$	1
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって、 $g(t)$ のグラフは以下のようになる。以上より、 $t=1$ のときに $g(t)$ が最大となるため、

$$\sqrt{\frac{1+3a}{12a}} \geq 1$$

が成り立つ。両辺を二乗すると、

$$\begin{aligned} \frac{1+3a}{12a} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow 1+3a &\geq 12a \\ \therefore a &\leq \frac{1}{9} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、求める範囲は $0 < a \leq \frac{1}{9}$ である。

(3)

 $a > \frac{1}{9}$ のとき、 $-1 \leq t \leq 1$ の範囲における $g(t)$ の最大値は、

$$g(-1) = a - 1$$

と

$$\begin{aligned} g\left(\sqrt{\frac{1+3a}{12a}}\right) &= -4a \cdot \frac{1+3a}{12a} \sqrt{\frac{1+3a}{12a}} + (1+3a) \sqrt{\frac{1+3a}{12a}} \\ &= \frac{2}{3}(1+3a) \sqrt{\frac{1+3a}{12a}} \\ &= \frac{2}{6\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+3a)^3}{a}} \end{aligned}$$

のうち大きい方であり、ここで

$$g\left(\sqrt{\frac{1+3a}{12a}}\right) = \frac{2}{3}(1+3a) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12a}} \geq \frac{2}{3}(1+3a) \sqrt{\frac{1}{4}} = a + \frac{1}{3} > a - 1 = g(-1)$$

であるから、最大値は $g\left(\sqrt{\frac{1+3a}{12a}}\right) = \frac{2}{6\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+3a)^3}{a}}$ であることがわかる。 $\frac{(1+3a)^3}{a}$ が最小値をとるとき、 $\frac{2}{6\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+3a)^3}{a}}$ も最小値をとるため、 $h(a) = \frac{(1+3a)^3}{a}$ として $h(a)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} h'(a) &= \frac{9a(1+3a)^2 - (1+3a)^3}{a^2} \\ &= \frac{(6a-1)(1+3a)^2}{a^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $h(a)$ の増減表は次のようになる。

a	$\frac{1}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$
h'	$-$	$-$	0	$+$
h		$\searrow$	極小	$\nearrow$

以上より、 $a = \frac{1}{6}$ のとき $h(a)$ が最小値をとるため $\frac{2}{6\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+3a)^3}{a}}$ も最小値をとる。このとき、 $f(x)$ の最大値は

$$\begin{aligned} \frac{2}{6\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+3a)^3}{a}} &= \frac{2}{6\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{6}}} \\ &= \frac{2}{6\sqrt{3}} \sqrt{6 \left(\frac{3}{2}\right)^3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \sin x = t &= \sqrt{\frac{1+3a}{12a}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

〔解答〕

(1)	え	お
	(b)	(a)
(2)	か	
	(c)	
(3)	夕	チ
	2	8
(4)	ツ	テ
	3	7

〔解説〕

(1)

 $x = -1$ のとき、

$$\sin \frac{\pi}{2} x = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$-\frac{1}{7}x = \frac{1}{7}$$

となるため、 $\sin \frac{\pi}{2} x > -\frac{1}{7}x$ は成り立たない。 -1 は A の要素ではないため、

$$-1 \notin A$$

と表される。 $x = 5$ のとき、

$$\sin \frac{\pi}{2} x = \sin \left(\frac{5}{2} \pi \right) = 1$$

$$-\frac{1}{7}x = -\frac{5}{7}$$

となるため、 $\sin \frac{\pi}{2} x > -\frac{1}{7}x$ が成り立つ。 5 は A の要素であるため、

$$5 \in A$$

と表される。

(2)

$B \cap C$ が空集合であるためには、

$$0 < x < b \text{ かつ } x \geq c$$

が成り立つ x が存在しなければよい。したがって求める条件は、

$$b \leq c$$

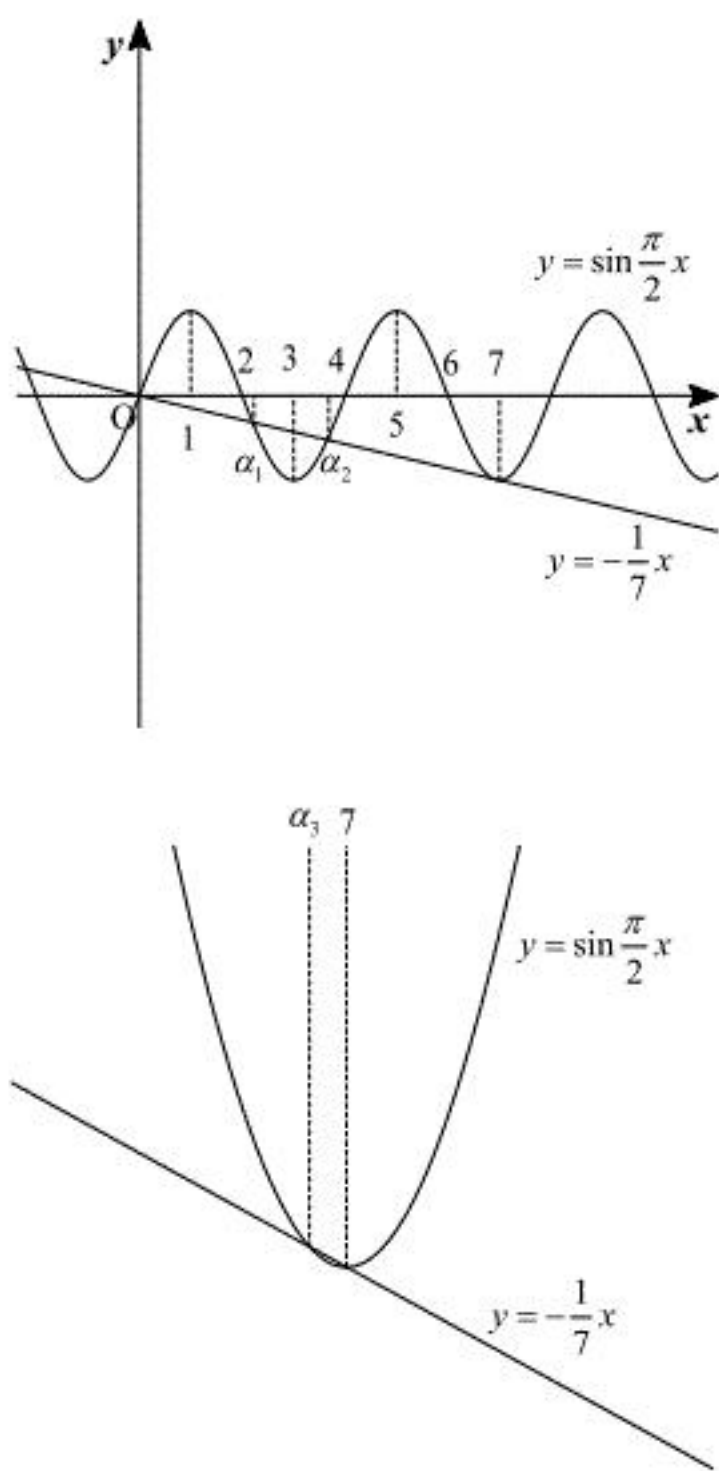
となる。

(3)

0 以上の整数 x に対して、 $\sin \frac{\pi}{2} x - \left(-\frac{1}{7}x \right)$ の符号は以下のように変化するから、 xy 平面上に

において曲線 $y = \sin \frac{\pi}{2} x$ と直線 $y = -\frac{1}{7}x$ の位置関係は以下ようになる。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	$n (\geq 8)$
$\sin \frac{\pi}{2} x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	≥ -1
$-\frac{1}{7}x$	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{6}{7}$	-1	< -1
$\sin \frac{\pi}{2} x - \left(-\frac{1}{7}x \right)$	0	+	+	-	+	+	+	0	+



ここで、 $y = \sin \frac{\pi}{2} x$, $y = -\frac{1}{7}x$ のグラフは原点对称であることに注意すると、

$$-7 < \alpha_3 < -6, -4 < \alpha_2 < -3, -3 < \alpha_1 < -2, 2 < \alpha_1 < 3, 3 < \alpha_2 < 4, 6 < \alpha_3 < 7$$

を満たす実数 $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が存在して、集合 A は

$$-7 < x < \alpha_3, \alpha_2 < x < \alpha_1, 0 < x < \alpha_1, \alpha_2 < x < \alpha_3, 7 < x$$

表せることがわかる。以上より、 $A \supset B$ となる b のうち、整数で最大のものは 2 であり、また、

$A \supset C$ となる c のうち、整数で最小のものは 8 であることがわかる。

(4)

(3)における考察より、 $A \cap B$ が連結であるような b のうち、整数で最大のものは 3 であり、また、

$A \cap C$ が連結であるような b のうち、整数で最小のものは 7 であることがわかる。

【解答】

(1)	ト	ナ	ニ	ヌ	き	く
	6	-2	5	-1	(b)	(b)
(2)	ネ	ノ	ハ	ヒ	け	
	2	1	-2	1	(b)	
(3)	フ	ヘ	ホ	マ	こ	
	8	3	4	3	(b)	
(4)	ミ	ム				
	4	3				

【解説】

(1)

各点の座標は,

$$A_1(1, 0, 0)$$

$$A_2(\cos \theta, \sin \theta, 2)$$

$$B_1(0, 1, 0)$$

$$B_2(-\sin \theta, \cos \theta, 2)$$

$$C_1(-1, 0, 0)$$

$$C_2(-\cos \theta, -\sin \theta, 2)$$

$$D_1(0, -1, 0)$$

$$D_2(\sin \theta, -\cos \theta, 2)$$

となる。対称性より、 A_1 から B_1 、 A_2 から B_2 へ移動するときのみを考えると、

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA_1} + t\overrightarrow{A_1B_1} = (1-t, t, 0)$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA_2} + t\overrightarrow{A_2B_2} = \{\cos \theta + t(-\sin \theta - \cos \theta), \sin \theta + t(\cos \theta - \sin \theta), 2\}$$

と表される。ただし、 $0 \leq t \leq 1$ である。したがって、

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{\cos \theta - 1 + t(1 - \sin \theta - \cos \theta), \sin \theta + t(-1 + \cos \theta - \sin \theta), 2\}$$

となるため、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{P_1P_2}|^2 &= \{\cos \theta - 1 + t(1 - \sin \theta - \cos \theta)\}^2 + \{\sin \theta + t(-1 + \cos \theta - \sin \theta)\}^2 + 2^2 \\ &= \cos^2 \theta + 1 + t^2(1 - \sin \theta - \cos \theta)^2 - 2\cos \theta - 2t(1 - \sin \theta - \cos \theta) \\ &\quad + 2t\cos \theta(1 - \sin \theta - \cos \theta) + \sin^2 \theta + t^2(-1 + \cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &\quad + 2t\sin \theta(-1 + \cos \theta - \sin \theta) + 4 \\ &= (4 - 4\cos \theta)(t^2 - t) + 6 - 2\cos \theta \\ &= (4 - 4\cos \theta)\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 5 - \cos \theta \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 \leq t \leq 1$ であるため $t=0, 1$ のとき $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ は最大となり $t = \frac{1}{2}$ のとき $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ は最小となる。

したがって、 $t=0, 1$ のとき P_1P_2 の長さの最大値は

$$\sqrt{(4 - 4\cos \theta)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 - \cos \theta} = \sqrt{6 - 2\cos \theta}$$

となり、 $t = \frac{1}{2}$ のとき P_1P_2 の長さの最小値は

$$\sqrt{(4 - 4\cos \theta) \cdot 0^2 + 5 - \cos \theta} = \sqrt{5 - \cos \theta}$$

と求まる。

(2)

線分 A_1A_2 と平面 $z=h$ の交点を A_h 、線分 B_1B_2 と平面 $z=h$ の交点を B_h とすると、

$$\overrightarrow{OA_h} = \overrightarrow{OA_1} + s\overrightarrow{A_1A_2} = \{1-s(\cos \theta - 1), s \cdot \sin \theta, 2s\}$$

$$\overrightarrow{OB_h} = \overrightarrow{OB_1} + s\overrightarrow{B_1B_2} = \{-s \cdot \sin \theta, 1+s(\cos \theta - 1), 2s\}$$

ただし、 $0 < s < 1$ である。ここで z 座標に注目すると、

$$2s = h$$

であるから、

$$\overrightarrow{OA_h} = \left\{1 - \frac{h}{2}(\cos \theta - 1), \frac{h}{2}\sin \theta, h\right\}$$

$$\overrightarrow{OB_h} = \left\{-\frac{h}{2}\sin \theta, 1 + \frac{h}{2}(\cos \theta - 1), h\right\}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{A_hB_h} = \left\{-1 + \frac{h}{2}(1 - \cos \theta - \sin \theta), 1 + \frac{h}{2}(-\sin \theta + \cos \theta - 1), 0\right\}$$

と表され、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_hB_h}|^2 &= \left\{-1 + \frac{h}{2}(1 - \cos \theta - \sin \theta)\right\}^2 + \left\{1 + \frac{h}{2}(-\sin \theta + \cos \theta - 1)\right\}^2 \\ &= 1 + \frac{h^2}{4}(1 - \cos \theta - \sin \theta)^2 - h(1 - \cos \theta - \sin \theta) \\ &\quad + 1 + \frac{h^2}{4}(-\sin \theta + \cos \theta - 1)^2 + h(-\sin \theta + \cos \theta - 1) \\ &= 2 + (1 - \cos \theta)(h^2 - 2h) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より一辺の長さは $\sqrt{2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)}$ となり、 $\sqrt{2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)}$ を変形すると、

$$\sqrt{2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)} = \sqrt{(h-1)^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta + 1}$$

となるため、 $h=1$ のときに一辺の長さが最小になる。

(3)

求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left\{ \sqrt{2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)} \right\}^2 dh \\ &= \int_0^2 \{2 + (h^2 - 2h)(1 - \cos \theta)\} dh \\ &= \left[2h + \left(\frac{1}{3}h^3 - h^2\right)(1 - \cos \theta) \right]_0^2 \\ &= 4 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\cos \theta \end{aligned}$$

と求まる。

(4)

θ が π に限りなく近づくとき、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi} V &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \left(\frac{4}{3}\cos \theta + \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}\cos \pi + \frac{8}{3} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。