

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	
	1	3	-1	2	2	3	
(2)	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	7	2	-2	1	3	2	7

【解説】

(1)

与式より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &\Leftrightarrow 3a_n = (a_n + 2n - 1) - \{a_{n-1} + 2(n-1) - 1\} \\
 &\Leftrightarrow 2a_n = -a_{n-1} + 2 \\
 &\Leftrightarrow a_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(a_{n-1} - \frac{2}{3} \right) \\
 &\Leftrightarrow a_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

を得る。また、 $n=1$ のときは

$$\begin{aligned}
 S_1 &= a_1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a_1 + 2 \cdot 1 - 1) = a_1 \\
 \therefore a_1 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}
 a_n - \frac{2}{3} &= \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{2}{3} \right) \\
 \therefore a_n &= \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

と求めることができる。

(2)(i)

直線 ℓ は点 $(2t, 1, -t)$ を通るベクトル $(-1, 2, 1)$ に平行な直線であるから、直線 ℓ 上の点 $X(x, y, z)$ は実数 s を用いて

$$(x, y, z) = (2t, 1, -t) + s(-1, 2, 1)$$

と表すことができる。点 P から ℓ に垂線 PH を下ろすとき、 $\overline{PH}$ と ℓ の方向ベクトル $(-1, 2, 1)$ が垂直であることから、 $X=H$ となるのは

$$\begin{aligned}
 \overline{PH} \cdot (-1, 2, 1) &= 0 \\
 &\Leftrightarrow (2t - s, -1 + 2s, -t + s) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \\
 \therefore s &= \frac{3t + 2}{6}
 \end{aligned}$$

となるときであり、このとき

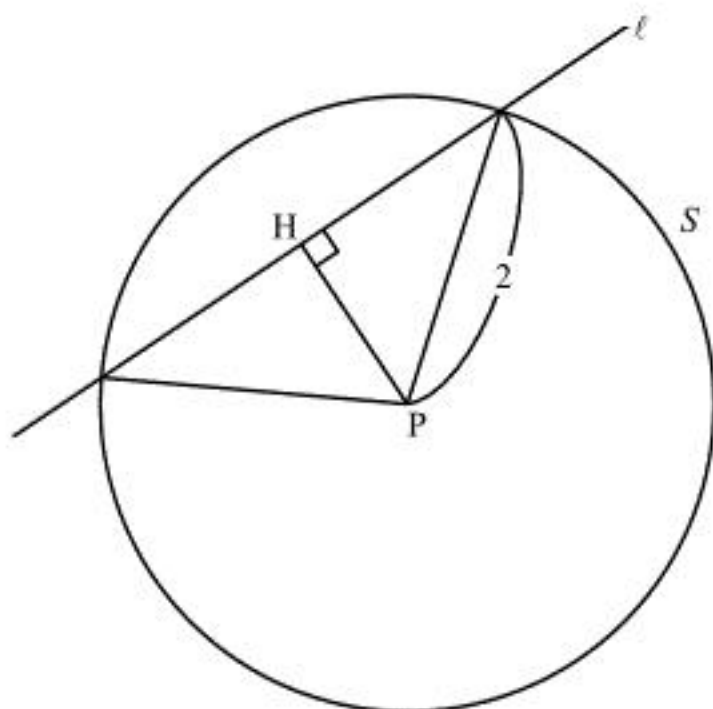
$$\begin{aligned}
 \overline{OH} &= \left(2t - \frac{3t + 2}{6}, 1 + 2 \cdot \frac{3t + 2}{6}, -t + \frac{3t + 2}{6} \right) \\
 &= \left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{3}, t + \frac{5}{3}, -\frac{1}{2}t + \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、垂線 PH の長さの 2 乗の値は

$$\begin{aligned}
 PH^2 &= \left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(t + \frac{5}{3} - 2 \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{3} \right)^2 \\
 &= \frac{7}{2}t^2 - 2t + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

と求めることができる。

(ii)

 S と ℓ が異なる 2 点で交わる時、その 2 点間の距離は、三平方の定理より

$$2\sqrt{2^2 - PH^2}$$

と表せるから、 PH^2 が最小となる時、2 点間の距離が最大となる。ここで、(i)の結果より、 PH は

$$\begin{aligned}
 PH^2 &= \frac{7}{2}t^2 - 2t + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{7}{2} \left(t - \frac{2}{7} \right)^2 + \frac{1}{21}
 \end{aligned}$$

と変形できるから、これは $t = \frac{2}{7}$ で最小値 $\frac{1}{21}$ をとることがわかる。また、 $PH^2 = \frac{1}{21}$ のときは

S と ℓ が異なる 2 点で交わるための条件 $PH < 2$ を満たしているから、求める t の値は $t = \frac{2}{7}$ であると確認できる。

【解答】

(1)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
	2	-1	-6	-1	3	3	
(2)	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ
	3	-8	3	4	3	7	3
(3)	ヒ	フ					
	13	4					

【解説】

(1)

放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ は点 $(3, 0)$ と点 $P(p, f(p))$ を通るから、関係式

$$9a + 3b + c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$p^2a + pb + c = p^3 - 3p^2 - p + 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。また、放物線 C と曲線 $y = f(x)$ の接線 ℓ が点 P で接することから、2つの曲線の $x = p$ における微分係数は等しくなる。ここで、放物線について $y' = 2ax + b$ であり、曲線 $y = f(x)$ について $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ であることから、関係式

$$3p^2 - 6p - 1 = 2ap + b \quad \dots \textcircled{3}$$

を満たす。以下、①かつ②かつ③を満たす a, b, c を求める。

②式の辺々から①式の辺々を引くことにより

$$\begin{aligned} (p^2 - 9)a + (p - 3)b &= p^3 - 3p^2 - p + 3 \\ \Leftrightarrow (p^2 - 9)a + (p - 3)b &= (p - 3)(p^2 - 1) \\ \Leftrightarrow (p + 3)a + b &= p^2 - 1 \quad (\because p \neq 3) \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

を得る。③、④式から b を消去することにより

$$\begin{aligned} 3p^2 - 6p - 1 &= 2ap - (p + 3)a + p^2 - 1 \\ \Leftrightarrow (p - 3)a &= 2p(p - 3) \\ \Leftrightarrow a &= 2p \quad (\because p \neq 3) \end{aligned}$$

が得られる。これを④に代入することにより

$$b = -(p + 3)a + p^2 - 1 = -p^2 - 6p - 1$$

となり、さらに、これを①に代入することで

$$c = -9 \cdot 2p - 3(-p^2 - 6p - 1) = 3p^2 + 3$$

と求まる。

(2)

$\frac{1}{2} < p < 3$ のとき、 $p > 0$ より確かに曲線 C は下に凸の放物線であり、このとき C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2px^2 - (p^2 + 6p + 1)x + 3p^2 + 3 \\ &= 2p \left(x - \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \right) (x - 3) \end{aligned}$$

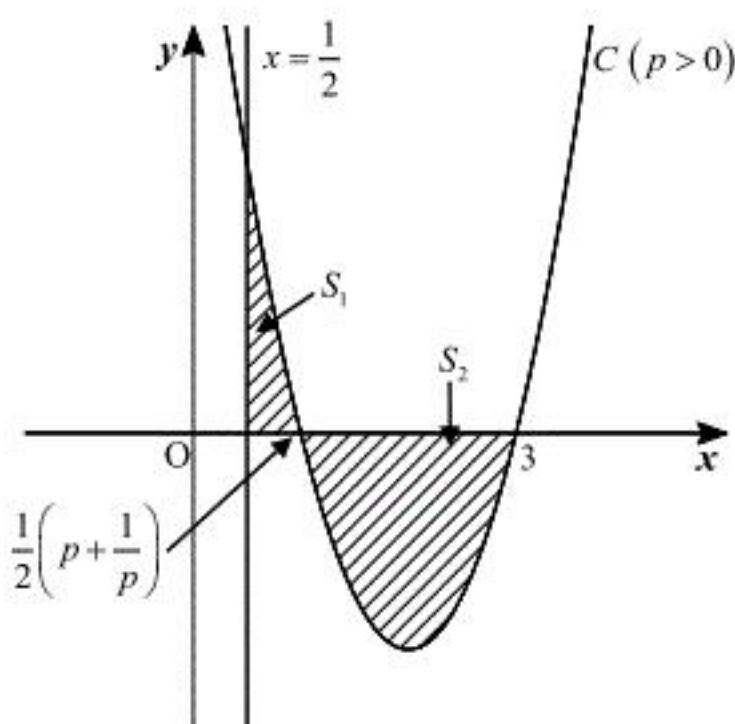
と変形できるから、これは x 軸と $x = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right), 3$ で交わることがわかる。また、

$$\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) < \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{2} \quad \left(\because \frac{1}{2} < p < 3 \right)$$

であり、さらに相加平均、相乗平均に関する不等式より

$$\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \geq \sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 1 \quad (\because p > 0)$$

であるから、 $1 \leq \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) < 3$ を満たすことがわかる。よって、 S_1, S_2 はそれぞれ下図の斜線部の面積であることがわかる。



したがって、 S_1, S_2 は

$$S_1 = \int_{\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)}^1 \left\{ 2px^2 - (p^2 + 6p + 1)x + 3p^2 + 3 \right\} dx \quad \dots \textcircled{5}$$

$$S_2 = \int_{\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)}^3 \left\{ 2px^2 - (p^2 + 6p + 1)x + 3p^2 + 3 \right\} dx \quad \dots \textcircled{6}$$

と立式できるから、 $S_1 - S_2$ は p を用いて

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_{\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)}^1 \left\{ 2px^2 - (p^2 + 6p + 1)x + 3p^2 + 3 \right\} dx \\ &\quad - \int_{\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)}^3 \left\{ 2px^2 - (p^2 + 6p + 1)x + 3p^2 + 3 \right\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)}^1 \left\{ 2px^2 - (p^2 + 6p + 1)x + 3p^2 + 3 \right\} dx \\ &= \left[\frac{2p}{3} x^3 - \frac{p^2 + 6p + 1}{2} x^2 + (3p^2 + 3)x \right]_{\frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right)}^1 \\ &= \left\{ \frac{2p}{3} \cdot 3^3 - \frac{p^2 + 6p + 1}{2} \cdot 3^2 + (3p^2 + 3) \cdot 3 \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{2p}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \frac{p^2 + 6p + 1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + (3p^2 + 3) \cdot \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{25}{24} (3p^2 - 8p + 3) \end{aligned}$$

と表せる。このとき、 $S_1 = S_2$ となる p の値は

$$\begin{aligned} \frac{25}{24} (3p^2 - 8p + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3p^2 - 8p + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \quad \left(\because \frac{1}{2} < p < 3 \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$p = 1$ のとき、⑤、⑥より

$$S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^2 - 8x + 6) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - 4x^2 + 6x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{2}{3} - 4 + 6 \right) - \left(\frac{1}{12} - 1 + 3 \right) = \frac{7}{12}$$

$$S_2 = -2 \int_1^3 (x - 1)(x - 3) dx = \frac{2}{6} \cdot (3 - 1)^3 = \frac{8}{3}$$

であるから、 $S_1 + S_2$ の値は

$$S_1 + S_2 = \frac{7}{12} + \frac{8}{3} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}$$

と求まる。

〔解答〕

(1)	$\boxed{\frown}$	$\boxed{\text{ホ}}$
	5	-4
(2)	$\boxed{\sphericalangle}$	
	7	
(3)	$\boxed{\equiv}$	$\boxed{\triangle}$
	4	-3
(4)	$\boxed{\times}$	$\boxed{\text{モ}}$
	-15	15
(5)	$\boxed{\text{ヤ}}$	$\boxed{\text{ユ}}$
	7	-3

〔解説〕

(1)

 $a=-4$ のとき、関数 $f(x)$ は

$$f(x)=(x+4)(x^2-2x-11)$$

であるから、 $f(x)=0$ の解は

$$x=-4, 1\pm 2\sqrt{3}$$

となり、さらに $f(x)$ の3次の項が正であることから

$$A=\{x \mid x < -4, 1-2\sqrt{3} < x < 1+2\sqrt{3}\}$$

となる。ここで

$$1+2\sqrt{3}=4.4\dots \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

であるから、 $J_n \supset A$ となる n の最小値は5であり、 $J_n \subset A$ となる n の最大値は-4であることがわかる。

(2)

 $a=-4, n=-3$ のとき、

$$A=\{x \mid x < -4, 1-2\sqrt{3} < x < 1+2\sqrt{3}\}, I_n=\{x \mid x > -3\}$$

となり、さらに

$$1-2\sqrt{3}=-2.4\dots \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

であることから、 $I_n \cap A = \{x \mid 1-2\sqrt{3} < x < 1+2\sqrt{3}\}$ となる。したがって、 $I_n \cap A$ に含まれる整数は、①、②より -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 の7個となることがわかる。

(3)

 $a=1$ のとき、関数 $f(x)$ は

$$f(x)=(x-1)(x^2-2x-11)$$

であるから、 $f(x)=0$ の解は

$$x=1, 1\pm 2\sqrt{3}$$

となり、さらに $f(x)$ の3次の項が正であることから

$$A=\{x \mid x < 1-2\sqrt{3}, 1 < x < 1+2\sqrt{3}\}$$

となる。ここで、①より $I_n \cap A$ が空集合でない n の最大値は4であることがわかり、さらに②より $J_n \subset A$ となる n の最大値は-3となることがわかる。

(4)

 $a=1$ のとき、関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は

$$f(x)=(x-1)(x^2-2x-11)=x^3-3x^2-9x+11$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

 x, x' が題意で与えられた条件を満たすためには

$$x < x' \quad \text{かつ} \quad f(x) > f(x')$$

を満たすことが必要であるから、 $x < x'$ は $-1 \leq x < x' \leq 3$ でなければならない。ここで $x=-1, x'=3$ とすると、 $f(x)=f(-1)=16, f(x')=f(3)=-16$ より、

$$-15 \leq m \leq 15$$

を満たす整数 m は条件を満たすことがわかる。また、逆に

$$m \geq 16 \quad \text{または} \quad m \leq -16$$

を満たす整数 m に対しては、 $-1 \leq x < x' \leq 3$ において

$$f(x) > m \quad \text{を満たす} \quad x \text{ が存在しない} \quad \text{または} \quad m > f(x') \quad \text{を満たす} \quad x' \text{ が存在しない}$$

となるから、条件を満たす整数 m は $-15 \leq m \leq 15$ を満たす整数であることがわかる。したがって、求める整数 m の最小値は-15であり、最大値は15である。

(5)

 $a=7$ のとき、関数 $f(x)$ は

$$f(x)=(x-7)(x^2-2x-11)$$

であるから、 $f(x)=0$ の解は

$$x=7, 1\pm 2\sqrt{3}$$

となり、さらに $f(x)$ の3次の項が正であることから

$$A=\{x \mid x < 1-2\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3} < x < 7\}$$

となる。よって、 $J_n \supset A$ となる n の最小値は7であり、 $J_n \subset A$ となる n の最大値は②より -3であることがわかる。