

(2015年度)

2 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ、3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し、所定の欄に氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら、この問題冊子が、上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は、HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはならない。
5. マーク式の解答は、解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき、マーク欄からはみ出したり、白い部分を残したり、文字や番号、○や×をつけてはならない。
7. 問題① ②の解答は、各解答欄に丁寧に記入すること。
足らない場合は、その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には何も書いてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. マーク式解答用紙の最下段の① ②の欄には記入しないこと。
10. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはならない。
11. 試験時間中に退場してはならない。
12. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
13. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。
14. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

- 1 (1) (i) $a > 0, a \neq 1, M > 0$ である実数 a, M に対し, a を底とする M の対数 $\log_a M$ の定義を述べよ。
- (ii) $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$ である実数 a, b, c に対し, 底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 正の実数 x の自然対数 $\log x$ は

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

と表される。これを用いて, 正の実数 x, y に対し

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

が成り立つことを示せ。

2 座標平面上で2つのベクトル

$$\vec{p} = (p, 0), \quad \vec{q} = (q, 0)$$

を考える。ただし、 $0 < p < 1, q > 1$ とする。 $\vec{x}$ を単位ベクトルとして、以下の問に答えよ。

- (1) 任意の $\vec{x}$ について、 $\vec{x}$ と $\vec{x} - \vec{p}$ は直交しないことを示せ。
- (2) $\vec{x}$ と $\vec{x} - \vec{q}$ が直交するとき、 $|\vec{x} - \vec{q}|$ を q を用いて表せ。
- (3) $\vec{p}, \vec{q}$ が次の条件をみたすとする。

条件： 任意の $\vec{x}$ について $|\vec{x} - \vec{p}| : |\vec{x} - \vec{q}| = 1 : 2$ となる。

- (i) p および q の値を求めよ。
- (ii) $\vec{x}$ と $\vec{x} - \vec{q}$ が直交するとき、原点を始点として $\vec{x}, \vec{p}, \vec{q}$ を図示せよ。
- (iii) 実数 a に対して、

$$\vec{s} = \frac{\vec{x} - \vec{p}}{|\vec{x} - \vec{p}|^3} - a \frac{\vec{x} - \vec{q}}{|\vec{x} - \vec{q}|^3}$$

とおく。任意の $\vec{x}$ について、 $\vec{x}$ と $\vec{s}$ が平行となるときの a の値を求めよ。

- 3 (1) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ とする。

$$x^2 + \boxed{\text{ア}} x + \boxed{\text{イ}} = 0$$

である。また、 $y = x^2$ とするとき、

$$y^2 + \boxed{\text{ウ}} y + \boxed{\text{エ}} = 0$$

である。 $x^3 = ax + b$ となる整数 a, b は

$$a = \boxed{\text{オ}}, \quad b = \boxed{\text{カ}}$$

である。

- (2) θ を実数とするとき、

$$\cos 3\theta = \boxed{\text{キ}} \cos^3 \theta + \boxed{\text{ク}} \cos \theta,$$

$$\cos 5\theta = \boxed{\text{ケ}} \cos^5 \theta + \boxed{\text{コ}} \cos^3 \theta + \boxed{\text{サ}} \cos \theta$$

である。

- (3) $a > 1$ とする。数列

$a, 1$		$a^2, a, 1$		$a^3, a^2, a, 1$		$\dots$
第1群		第2群		第3群		

において、例えば、第3群第1項は a^3 であり、これは最初から数えて第6項である。 a^{12} が初めて現れるのは最初から数えて第 $\boxed{\text{シ}}$ 項である。また最初から数えて第645項は第 $\boxed{\text{ス}}$ 群 $\boxed{\text{セ}}$ 項である。

(4) 次の a, b, c のように, 2つの試行を連続して行った結果それぞれ事象 A と事象 B が起こった。2つの試行が独立なものの組み合わせとして最もふさわしいものを一つ選べ。

a. 赤い玉が4個, 白い玉が4個入った袋がある。

A : 玉を1個取り出したところ白だった。

B : 最初の試行で取り出した玉を戻した後, 1個取り出したところ白だった。

b. 30人のクラスがある。

A : 無作為に選んだ X さんの誕生日が1月1日である。

B : その次に無作為に選んだ Y さんの誕生日が1月1日である。

c. 5つの扉があり, それぞれの後ろに猫が一匹いる。猫は黒猫が3匹, 白猫が2匹であり, その場から動かないものとする。

A : 1つ目の扉を開けたところ, 黒猫がいた。

B : 1つ目の扉を閉じた後, 別の扉を開けたところ, 白猫がいた。

選択肢：

- | | | |
|--------|-------|-------|
| 1. a | 2. b | 3. c |
| 4. ab | 5. ac | 6. bc |
| 7. abc | 8. なし | |