

(2015年度)

1 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は6ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し，所定の欄に氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は，HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
5. 解答は，解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき，マーク欄からはみ出したり，白い部分を残したり，文字や番号，○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に7, イ に-26をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
イ	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を, $\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2+\boxed{1}x+\boxed{0}$ とする。

1 (1) 関数 $f(x) = |x^2 - 3| - 1$ ($x \geq 0$) を考える。

(i) $f(x) = 0$ となるのは $x = \sqrt{\text{ア}}$ または $x = \text{イ}$ のときである。ただし, $\sqrt{\text{ア}} < \text{イ}$ とする。

(ii) 関数 $f(x)$ は区間 $\sqrt{\text{ア}} \leq x \leq \text{イ}$ において, $x = \sqrt{\text{ウ}}$ で極大値 エ をとる。

(iii) $\int_0^2 \frac{3}{8} f(x) dx = \text{オ} + \sqrt{\text{カ}} + \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \sqrt{\text{ケ}}$ である。

(2) 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = 2^{3x+2} - 3(1 + \sqrt{2}) \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+\frac{1}{2}}$$

で定める。 $g(x)$ は,

$$x = \text{コ} \quad \text{で極大値} \quad \frac{\text{サ}}{\text{シ}} + \frac{\text{ス}}{\text{セ}} \sqrt{\text{ソ}},$$

$$x = \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \quad \text{で極小値} \quad \frac{\text{ツ}}{\text{テ}} + \frac{\text{ト}}{\text{ナ}} \sqrt{\text{ニ}}$$

をとる。

2 N を 2 以上の整数とする。整数 a, b に対し、演算 $\oplus$ を

$$a \oplus b = ((a + b) \text{ を } N \text{ で割ったときの余り})$$

と定める。例えば、 $N = 2$ のとき、

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0, \quad 1 \oplus 3 = 0$$

である。

(1) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n \oplus (n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(i) $N = 4$ のとき、 $a_3 = \boxed{\text{ヌ}}$ である。

(ii) $N \geq 4$ とする。

$$N \text{ が偶数のとき, } a_{N+1} = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}N + \boxed{\text{ハ}},$$

$$N \text{ が奇数のとき, } a_{N+1} = \boxed{\text{ヒ}} \text{ である。}$$

$$(iii) \quad N \text{ が偶数のとき, } a_{N-1} = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}N + \boxed{\text{ホ}},$$

$$N \text{ が奇数のとき, } a_{N-1} = \boxed{\text{マ}} \text{ である。}$$

- (2) N を偶数とし, $N = 2M$ と表す。ただし, M は自然数である。
次の条件によって定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n \oplus (2n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, $b_M = 0$ となる必要十分条件は, N が $\boxed{\text{ミ}}$ の倍数となることである。 N が $\boxed{\text{ミ}}$ の倍数でない偶数のとき,

$$b_M = \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}} N \text{ である。}$$

- 3 a を実数とすると、座標平面において、円 $C : x^2 + y^2 = 20$
 および円 $C_a : x^2 + y^2 + a(x + 3y - 10) = 20$ を考える。

- (1) どのような a の値に対しても、 C_a は 2 点 $P(\boxed{\text{モ}}, \boxed{\text{ヤ}})$ 、
 $Q(\boxed{\text{ユ}}, \boxed{\text{ヨ}})$ を必ず通る。ただし、 $\boxed{\text{モ}} < \boxed{\text{ユ}}$ と
 する。

- (2) C_a の中心の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}a, \frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}a \right)$ であり、 C_a の半径を

$$r \text{ とすると、} r^2 = \frac{\boxed{\text{ロ}}}{\boxed{\text{ワ}}} \left(a^2 + \boxed{\text{ヲ}}a + \boxed{\text{ン}} \right) \text{ である。}$$

- (3) C_a の半径 r が最小となるのは、 $a = \boxed{\text{あ}}$ のときである。

- (4) C の周および内部の領域を D 、 C_a の周および内部の領域を D_a
 とする。 $a = \boxed{\text{あ}}$ のとき D と D_a の共通部分の面積は

$$\boxed{\text{い}}\pi + \boxed{\text{う}} \text{ である。}$$

- (5) x 座標と y 座標がともに整数の点を格子点とよぶ。 D と D_a の共
 通部分に含まれる格子点の数を $n(a)$ で表す。

- (i) $a = -4$ のとき、 $n(a) = \boxed{\text{え}}$ である。

- (ii) $n(a)$ が最小値 $\boxed{\text{お}}$ をとるための必要十分条件は、

$$a < \boxed{\text{か}} \text{ である。}$$

- (iii) $12 \leq n(a) < 14$ となる必要十分条件は、

$$\boxed{\text{き}} \leq a < \boxed{\text{く}} \text{ である。}$$

