

(2015年度)

2 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は6ページ, 3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し, 所定の欄に氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
5. 解答は, 解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき, マーク欄からはみ出したり, 白い部分を残したり, 文字や番号, ○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0 または 正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に 7, イ に -26 をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2+x$ を, $\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ にあてはめる場合
 $\boxed{-1}x^2+\boxed{1}x+\boxed{0}$ とする。

- 1 (1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ が次の 2 つの式を満たしている。ただし, a は定数とする。

$$\begin{cases} \int_1^x f(t)dt = xg(x) - 2ax + 2 \\ g(x) = x^2 - x \int_0^1 f(t)dt - 3 \end{cases}$$

このとき, $a = \boxed{\text{ア}}$ であり,

$$f(x) = \boxed{\text{イ}} x^2 + \boxed{\text{ウ}} x + \boxed{\text{エ}}$$

である。

- (2) $c(n) = \frac{3n^2 + 174n + 231}{n^2 + 3n + 2}$ とおく。 $c(n)$ が整数となるような自然

数 n は $\boxed{\text{オ}}$ 個存在する。また, これら $\boxed{\text{オ}}$ 個の自然数のうちで最も大きいものを n^* と表すと, $n^* = \boxed{\text{カ}}$, $c(n^*) = \boxed{\text{キ}}$ である。

2

座標平面上の点 $(\alpha, 1)$ ($\alpha > 0$) を中心とする円 C と放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ が共に点 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ で直線 ℓ と接している。

(1) α を t の式で表すと

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} t^3$$

である。

以下では、 C が x 軸と接する場合を考える。 C と x 軸の接点を H とする。

$$(2) \alpha = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}} \text{ である。}$$

(3) ℓ の方程式は

$$y = \sqrt{\boxed{\text{ス}}} x + \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

(4) C の弧 PH のうちの短い方と放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ および x 軸とで囲まれる図形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \pi$$

である。

- 3 t を実数とする。座標平面上に、2点 $A(t, 0)$, $B(0, 1 - \sqrt{3}t)$ と、原点を中心とする半径1の円 C がある。点 P が円 C 上を動くときの2つのベクトル $\vec{AP}$, $\vec{BP}$ の内積の最大値を M_t とおき、 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = M_t$ となる点 P を P_t と表す。

- (1) $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、

$$M_t = \boxed{\text{ナ}} + \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}$$

であり、 P_t の座標は $(\boxed{\text{ヌ}}, \boxed{\text{ネ}})$ である。

- (2) 実数 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき、 M_t は $t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ で最小

値 $\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ をとる。

- (3) P_t の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ (ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$) と表す。実数 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき、 θ は

$$\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\pi < \theta \leq \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}\pi$$

の範囲を動く。