

(2015年度)

4 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は6ページ, 3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し, 所定の欄に氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
3. 監督から試験開始の指示があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
5. 解答は, 解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. マークをするとき, マーク欄からはみ出したり, 白い部分を残したり, 文字や番号, ○や×をつけてはならない。
7. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
8. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。
9. 試験時間中に退場してはならない。
10. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
11. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。
12. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

1

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の第1項から第 n 項までの和 S_n が $3S_n = a_n + 2n - 1$ を満たすならば,

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \right)^n + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

- (2) t を実数とする。座標空間において、点 $(2t, 1, -t)$ を通りベクトル $(-1, 2, 1)$ と平行な直線を ℓ とする。点 P の座標を $(0, 2, 0)$ とする。

- (i) 点 P から ℓ に垂線 PH を下ろすとき、

$$PH^2 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} t^2 + \boxed{\text{ケ}} t + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

- (ii) 点 P を中心とする半径 2 の球面を S とする。 S と ℓ が異なる 2 点で交わる時、その 2 点間の距離は $t = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ の

とき最大値をとる。

- 2 $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ とし、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ の点 $P(p, f(p))$ における接線を ℓ とする。ただし、 $p \neq 3$ とする。放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ は点 $(3, 0)$ を通り、直線 ℓ と P で接する。

(1) a, b, c をそれぞれ p の式で表すと、

$$a = \boxed{\text{セ}} p, \quad b = \boxed{\text{ソ}} p^2 + \boxed{\text{タ}} p + \boxed{\text{チ}}, \quad c = \boxed{\text{ツ}} p^2 + \boxed{\text{テ}}$$

である。

- (2) $\frac{1}{2} < p < 3$ とする。 C およびその下側の部分で、 C と直線 $x = \frac{1}{2}$ および x 軸で囲まれる図形の面積を S_1 とおき、 C およびその上側の部分で、 C と x 軸で囲まれる図形の面積を S_2 とおく。このとき、

$$S_1 - S_2 = \frac{25}{24} \left(\boxed{\text{ト}} p^2 + \boxed{\text{ナ}} p + \boxed{\text{ニ}} \right)$$

であり、 $S_1 = S_2$ となる p の値は

$$p = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

- (3) $p = 1$ のとき、

$$S_1 + S_2 = \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$$

である。

3 a を実数とし、 $f(x) = (x - a)(x^2 - 2x - 11)$ とおく。集合

$$A = \{x \mid f(x) < 0, x \text{ は実数}\}$$

を考える。また、 n を整数とし、集合

$$I_n = \{x \mid x > n, x \text{ は実数}\}$$

$$J_n = \{x \mid x < n, x \text{ は実数}\}$$

を考える。

(1) $a = -4$ のとき、 $J_n \supset A$ となる n の最小値は であり、

$J_n \subset A$ となる n の最大値は である。

(2) $a = -4, n = -3$ のとき、 $I_n \cap A$ に含まれる整数の個数は 個である。

(3) $a = 1$ のとき、 $I_n \cap A$ が空集合でない n の最大値は であり、
 $J_n \subset A$ となる n の最大値は である。

(4) $a = 1$ のとき、

$$x < x' \quad \text{かつ} \quad f(x) > m > f(x')$$

を満たす実数 x, x' が存在するような整数 m の最小値は ,

最大値は である。

(5) $a = 7$ のとき、 $J_n \supset A$ となる n の最小値は であり、

$J_n \subset A$ となる n の最大値は である。