

1

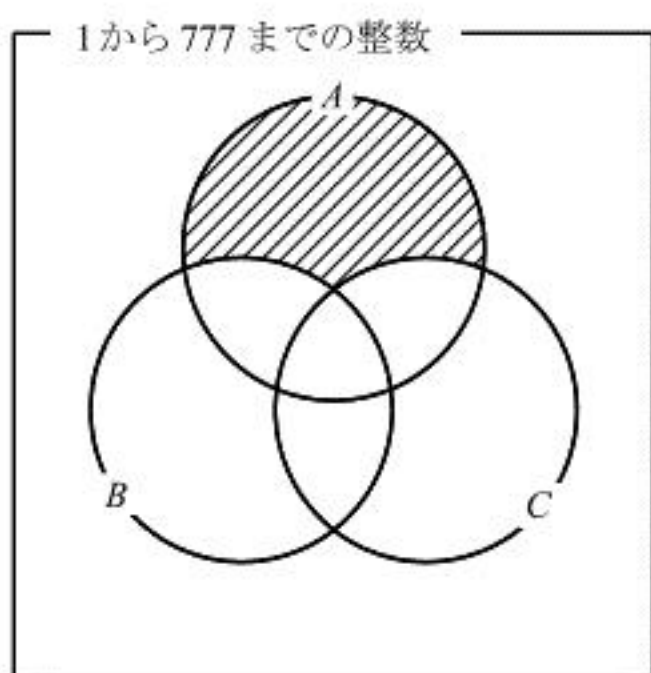
[解答]

(1)	ア	イ		
	104	60		
(2)	ウ	エ	オ	カ
	1	3	13	12
(3)	キ	ク	ケ	コ
	-20	3	8	3

[解説]

(1)

1から777までの整数のうち、4の倍数であるものの集合を A 、5の倍数の集合を B 、6の倍数の集合を C とする。以下にベン図を示す。



求めるのは、上図の斜線部が表す集合の要素の個数である。集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すと、これは

$$n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

となる。実数 x に対して、 $[x]$ が x を超えない最大の整数を表すとする。 $n(A)$ は、1から777までの整数のうち、4の倍数であるものの個数であるから、

$$n(A) = \left[\frac{777}{4} \right] = 194$$

となる。また、 $n(A \cap B)$ は、1から777までの整数のうち、4の倍数かつ5の倍数であるもの、すなわち20の倍数であるものの個数であるから、

$$n(A \cap B) = \left[\frac{777}{20} \right] = 38$$

となる。同様にして、

$$n(A \cap C) = \left[\frac{777}{12} \right] = 64$$

$$n(A \cap B \cap C) = \left[\frac{777}{60} \right] = 12$$

となるから、求める個数は、

$$194 - 38 - 64 + 12 = 104 \text{ (個)}$$

である。またこれらの数の総和は、

$$\sum_{k=1}^{194} 4k - \sum_{k=1}^{38} 20k - \sum_{k=1}^{64} 12k + \sum_{k=1}^{12} 60k = \frac{4 \cdot 194 \cdot 195}{2} - \frac{20 \cdot 38 \cdot 39}{2} - \frac{12 \cdot 64 \cdot 65}{2} + \frac{60 \cdot 12 \cdot 13}{2} = 40560$$

となるから、この総和の下2桁は60である。

(2)

$3^x = t$ とおくと、 $t > 0$ となり、 x と t は1対1で対応している。 $f(x)$ を t で表すと、

$$\begin{aligned} f(x) &= 3t^2 - 3\sqrt{3}t + 3a - 1 \\ &= 3 \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 3a - \frac{13}{4} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

となる。これを $g(t)$ とおくと、 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもつことと $g(t) = 0$ が異なる2つの正の実数解をもつことは同値である。放物線 $y = g(t)$ の軸の方程式は $t = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ より、

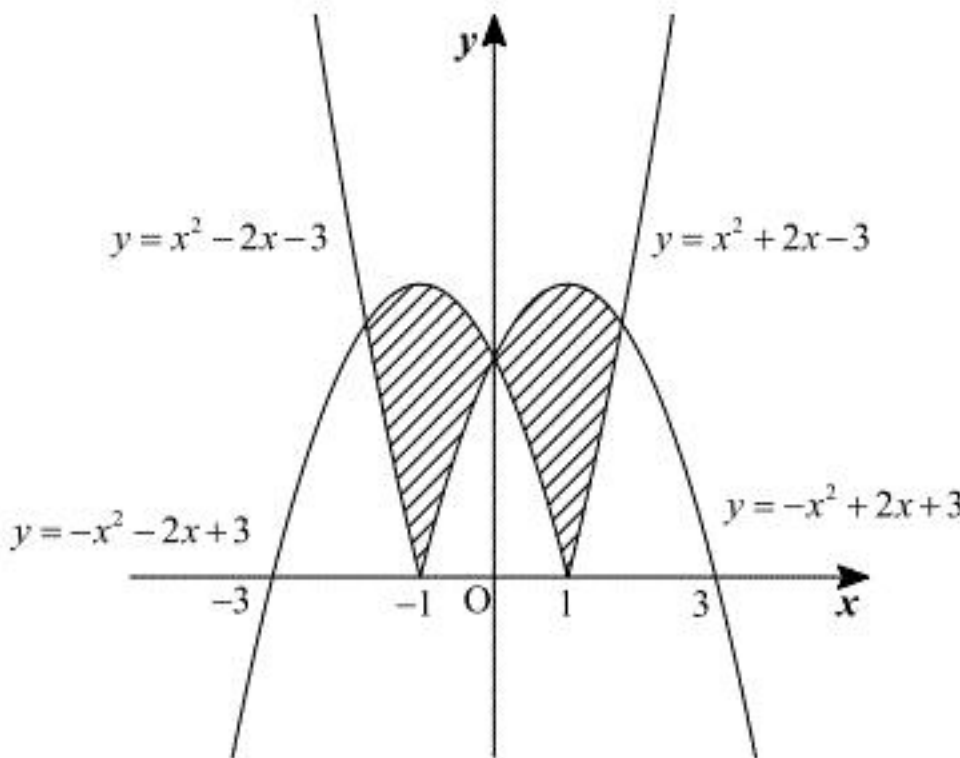
$g(t) = 0$ が異なる2つの正の実数解をもつためには、 $g(0) > 0$ かつ判別式 $D > 0$ が成り立てばよい。これらの条件をそれぞれ考えると、

$$\begin{aligned} g(0) &> 0 \\ \Leftrightarrow 3a - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> \frac{1}{3} \\ D &> 0 \\ \Leftrightarrow (-3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot (3a - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow 39 - 36a &> 0 \\ \Leftrightarrow a &< \frac{13}{12} \end{aligned}$$

となる。したがって求める a の範囲は $\frac{1}{3} < a < \frac{13}{12}$ とわかる。

(3)

曲線 C_1 の式は $x < 1$ で $y = -x^2 - 2x + 3$ 、 $x \geq 1$ で $y = x^2 + 2x - 3$ となる。また、曲線 C_2 の式は $x < -1$ で $y = x^2 - 2x - 3$ 、 $x \geq -1$ で $y = -x^2 + 2x + 3$ となる。よって2つの曲線の位置関係は下図の通りとなる。求積部分は下図の斜線部である。



$y = x^2 + 2x - 3$ と $y = -x^2 + 2x + 3$ の交点の x 座標のうち大きい方は、

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= -x^2 + 2x + 3 \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

より $x = \sqrt{3}$ とわかる。 C_1 と C_2 で囲まれた図形は y 軸について線対称であるから、この面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^1 \{(-x^2 + 2x + 3) - (-x^2 - 2x + 3)\} dx + 2 \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \{(-x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x - 3)\} dx \\ &= 2 \cdot \left[2x^2 \right]_0^1 + 2 \cdot \left[-\frac{2}{3}x^3 + 6x \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 4 + 2 \left(4\sqrt{3} - \frac{16}{3} \right) \\ &= -\frac{20}{3} + 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

と求めることができる。

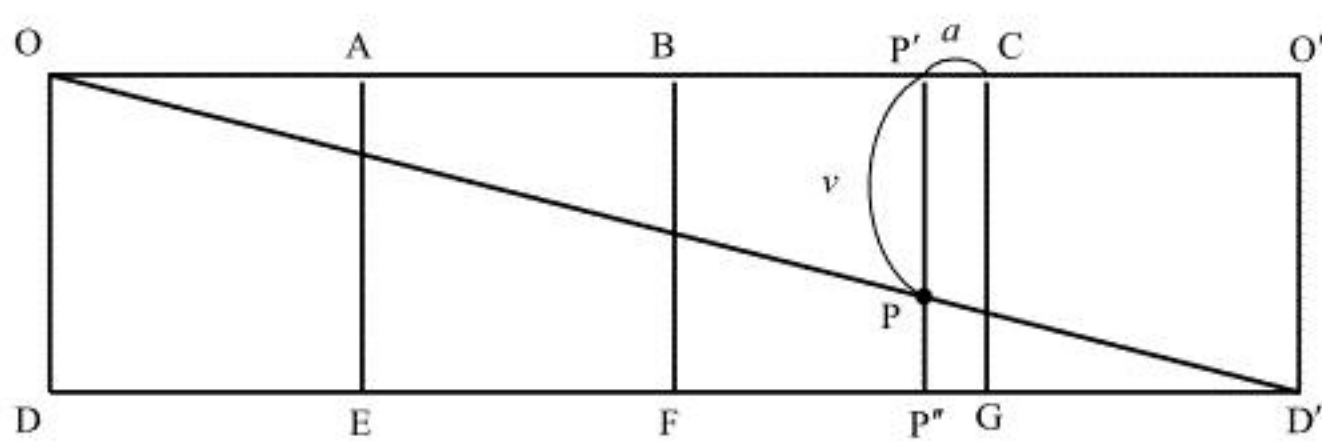
2

【解答】

(1)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
	-1	4	3	4	1	4	7	12	7	8	-5	4	13	24
(2)	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ							
	14	14	4	7	17	4	3							

【解説】

(1)



立方体の展開図を考える。また、展開図の右端に正方形 $CGD'O'$ を追加し、図のように点 P' , P'' を定める。

$$\triangle OPP' \sim \triangle OD'O'$$

であるから、

$$\begin{aligned} OP' : PP' &= OO' : D'O' \\ \Leftrightarrow 3 - a : v &= 4 : 1 \\ \therefore v &= -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

と求まる。また、点 H は OF 上の点であるから、 0 でない実数 h を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= h\overrightarrow{OF} \\ &= h \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h \\ h \\ h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。 $\overrightarrow{OP} = \left(a, 1, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4} \right)$ より、

$$\overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} h - a \\ h - 1 \\ h + \frac{1}{4}a - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &\perp \overrightarrow{OF} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OF} &= 0 \\ \Leftrightarrow (h - a)h + (h - 1)h + \left(h + \frac{1}{4}a - \frac{3}{4} \right)h &= 0 \\ \Leftrightarrow (h - a) + (h - 1) + \left(h + \frac{1}{4}a - \frac{3}{4} \right) &= 0 \quad (\because h \neq 0) \\ \Leftrightarrow 3h - \frac{3}{4}a - \frac{7}{4} &= 0 \\ \therefore h &= \frac{1}{4}a + \frac{7}{12} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$w = h = \frac{1}{4}a + \frac{7}{12}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}a + \frac{7}{12} \\ \frac{1}{4}a - \frac{5}{12} \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PH}|^2 &= \left(-\frac{3}{4}a + \frac{7}{12} \right)^2 + \left(\frac{1}{4}a - \frac{5}{12} \right)^2 + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{6} \right)^2 \\ &= \frac{7}{8}a^2 - \frac{5}{4}a + \frac{13}{24} \\ \therefore |\overrightarrow{PH}| &= \sqrt{\frac{7}{8}a^2 - \frac{5}{4}a + \frac{13}{24}} \quad (\because |\overrightarrow{PH}| > 0) \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PH}| &= \sqrt{\frac{7}{8}a^2 - \frac{5}{4}a + \frac{13}{24}} \\ &= \sqrt{\frac{7}{8} \left(a - \frac{5}{7} \right)^2 + \frac{2}{21}} \end{aligned}$$

と計算できる。 PH が最小となるときの P の位置が Q であるから、 Q の x 座標 a は、

$$a = \frac{5}{7}$$

であり、

$$|\overrightarrow{QH}| = \sqrt{\frac{2}{21}} = \frac{\sqrt{42}}{21}$$

となる。 $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{QH}$ より、 $\triangle OQF$ の面積は

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{OF}| |\overrightarrow{QH}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \frac{\sqrt{42}}{21} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

と求まる。展開図において $\angle O'D'O' = \theta$ とし、点 Q から線分 OO' に下した垂線の足を Q' 、線分 DD' に下した垂線の足を Q'' とおくと、

$$\tan \theta = \frac{O'D'}{OO'} = \frac{1}{4}$$

であり、

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{OQ'^2 + Q'Q^2} \\ &= \sqrt{OQ'^2 + (OQ' \tan \theta)^2} \\ &= OQ' \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \left(3 - \frac{5}{7} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{16}} \\ &= \frac{4}{7} \sqrt{17} \end{aligned}$$

と求まる。同様にして、

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{QQ''^2 + Q''D'^2} \\ &= \sqrt{(Q''D' \tan \theta)^2 + Q''D'^2} \\ &= Q''D' \sqrt{\tan^2 \theta + 1} \\ &= \left(1 + \frac{5}{7} \right) \sqrt{\frac{1}{16} + 1} \\ &= \frac{3}{7} \sqrt{17} \end{aligned}$$

と計算できるので、

$$\frac{\ell}{m} = \frac{\frac{4}{7} \sqrt{17}}{\frac{3}{7} \sqrt{17}} = \frac{4}{3}$$

と求まる。

〔解答〕

(1)	Ξ			
	699			
(2)	(i)	Δ	$\times$	Ξ
		4	3	9
	(ii)	Υ	Ξ	
		2	8	

〔解説〕

(1)

$2016_{(7)}$ を10進法で表すと、

$$2016_{(7)} = 2 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 699$$

である。

(2)(i)

自然数 k は

$$\begin{aligned} k &= 10101_{(n)} - 10101_{(m)} \\ &= (n^4 + n^2 + 1) - (m^4 + m^2 + 1) \\ &= n^4 - m^4 + n^2 - m^2 \\ &= (n^2 - m^2)(n^2 + m^2 + 1) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、整数 a と b を自然数 ℓ で割った余りが等しいことを $a \equiv b \pmod{\ell}$ と表すことにすると、

$$n^2 \equiv 0 \text{ または } 1 \pmod{3}$$

$$m^2 \equiv 0 \text{ または } 1 \pmod{3}$$

が成り立つ。 $n^2 + m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ のとき $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ かつ $m^2 \equiv 1 \pmod{3}$ であるから

$n^2 - m^2 \equiv 0 \pmod{3}$ も成り立つことに注意すれば、

k が3の倍数

$$\Leftrightarrow n^2 - m^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} n^2 \equiv 0 \text{ かつ } m^2 \equiv 0 \text{」 または 「} n^2 \equiv 1 \text{ かつ } m^2 \equiv 1 \text{」} \pmod{3} \quad \cdots \text{①}$$

が成り立つことが分かる。また、自然数 N ($2 \leq N \leq 9$) と $N^2 \pmod{7}$ との関係は以下の表のようになる。

$N \pmod{7}$	2	3	4	5	6	7	8	9
$N^2 \pmod{7}$	4	2	2	4	1	0	1	4

上の表より $n^2 - m^2$ と $n^2 + m^2 + 1$ が同時に7の倍数となることはないので、以下でこれらのどちらが7の倍数となるかによって場合分けを行う。

[1] $n^2 - m^2$ が7の倍数となるとき

このとき、 $2 \leq m < n \leq 9$ であることと上の表より、

$$(m, n) = (2, 5), (2, 9), (3, 4), (5, 9), (6, 8)$$

となる。このうち①を満たすものは、

$$(m, n) = (2, 5)$$

である。

[2] $n^2 + m^2 + 1$ が7の倍数となるとき

このとき、 $2 \leq m < n \leq 9$ であることと上の表より、

$$(m, n) = (2, 3), (2, 4), (3, 5), (3, 9), (4, 5), (4, 9)$$

となる。このうち①を満たすものは、

$$(m, n) = (2, 4), (3, 9), (4, 5)$$

である。

以上[1], [2]より、 k が21の倍数となる (m, n) の組は

$$(m, n) = (2, 5), (2, 4), (3, 9), (4, 5)$$

の4組存在する。また、これらの組の中で $m+n$ が最大になるのは

$$m=3, n=9$$

のときである。

(ii)

$$K = (9-3)(9+3)(9^2 + 3^2 + 1) = 6552$$

である。これを3進法で表すと、

$$\begin{aligned} 6552 &= 2 \cdot 3^7 + 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 \\ &= 22222200_{(3)} \end{aligned}$$

であるから、 3^2 の位の数字は2である。また、9進法で表すと、

$$6552 = 8 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 0 \cdot 9^0 = 8880_{(9)}$$

であるから、 9^2 の位の数字は8である。