

(1)

すべての自然数 n について

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^j}{j} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ の場合

①式の左辺は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 \frac{1}{1+i} + \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^j}{j} &= \frac{1}{1+1} + \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり右辺と一致する。よって、 $n=1$ のとき①式は成り立つ。[2] $n=k$ のときに①式が成り立つと仮定した場合

上記の仮定より

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k+i} + \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^j}{j} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

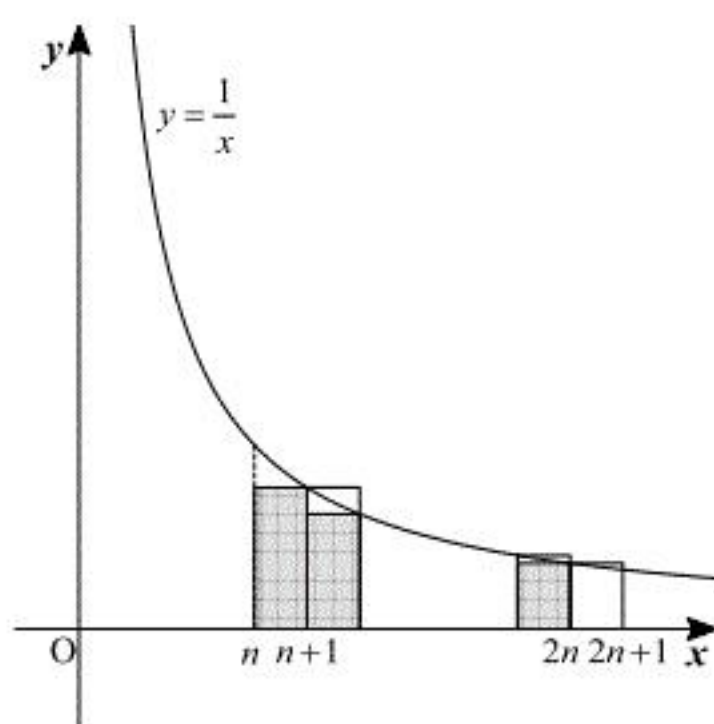
が成り立つ。①に $n=k+1$ を代入したもののについて、②を適用することにより

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{k+1+i} + \sum_{j=1}^{2(k+1)} \frac{(-1)^j}{j} &= \sum_{i=2}^{k+2} \frac{1}{k+i} + \sum_{j=1}^{2(k+1)} \frac{(-1)^j}{j} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{k+i} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^j}{j} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2} \\ &= 0 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} \\ &= -\frac{1}{k+1} + 0 + \frac{2}{2(k+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、右辺と一致する。すなわち、 $n=k+1$ のときも①式は成り立つことがわかる。以上[1],[2]から、数学的帰納法によって、すべての自然数 n に対して①式が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

関数 $y = \frac{1}{x}$ の概形、および $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$ の値を斜線部の面積で表したものは以下の図のようになる。関数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ は単調減少関数であるから、上図のように

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx$$

と評価できる。このとき、それぞれの定積分の値は

$$\begin{aligned} \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx &= [\log x]_{n+1}^{2n+1} = \log \frac{2n+1}{n+1} \\ \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx &= [\log x]_n^{2n} = \log 2 \end{aligned}$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ の極限值を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2n+1}{n+1} = \log 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log 2 = \log 2 \end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \log 2$$

であることがわかる。さて、ここで(1)の結果より、①を変形すると

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^j}{j} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$$

となるから、 $n \rightarrow \infty$ の極限值をとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^j}{j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = -\log 2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。また、①より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{(-1)^j}{j} &= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

となるから、 $n \rightarrow \infty$ の極限值をとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{(-1)^j}{j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} - \frac{1}{2n+1} \right) = -\log 2 - 0 = -\log 2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。したがって、③、④より $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$ の値は

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\log 2$$

となることが示された。

(証明終)

(1)

選択肢 A ～ H のそれぞれについて, (i)～(iv)のどの条件に当てはまるかを確認していくと, 以下ようになる。

[1] 選択肢 A. $2x+3y=0$

$(x, y) = (3m, -2m)$ (m は整数) と表せる格子点を通るから, この直線は格子点を無数に通ることがわかる。したがって, (i)～(iv)のどの条件にも当てはまらない。

[2] 選択肢 B. $2x-3y=1$

$(x, y) = (3m+1, -2m-1)$ (m は整数) と表せる格子点を通るから, この直線は格子点を無数に通ることがわかる。したがって, (i)～(iv)のどの条件にも当てはまらない。

[3] 選択肢 C. $4x+6y=3$

この直線がある格子点 $(x, y) = (m, n)$ を通ると仮定すると

$$4m+6n=3$$

の左辺は 2 で割り切れるが, 右辺は 2 で割り切れないため矛盾する。したがって, この直線はどの格子点も通らない。また, この直線の式を変形すると

$$y = \frac{-4x+3}{6}$$

となるから, $(x, y) = \left(p, \frac{-4p+3}{6}\right)$ (p は有理数) と表せる有理点を通るため, この直線は有理点を無数に通ることがわかる。したがって, (ii) の条件に当てはまる。

[4] 選択肢 D. $x+\sqrt{3}y=3$

$y=0$ のとき $x=3$ であるから, この直線は格子点 $(x, y) = (3, 0)$ を通ることがわかる。一方, $y \neq 0$ のとき, この直線の式を変形すると

$$\sqrt{3} = \frac{-x+3}{y}$$

となるから, この直線がある有理点 $(x, y) = (p, q)$ ($q \neq 0$) を通ると仮定すると, $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。したがって, (i) の条件に当てはまる。

[5] 選択肢 E. $\sqrt{2}x+3y=2$

$x=0$ のとき $y=\frac{2}{3}$ であるから, この直線は有理点 $(x, y) = \left(0, \frac{2}{3}\right)$ を通ることがわかる。一方, $x \neq 0$ のとき, この直線の式を変形すると

$$\sqrt{2} = \frac{-3y+2}{x}$$

となるから, この直線がある有理点 $(x, y) = (p, q)$ ($p \neq 0$) を通ると仮定すると, $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。したがって, (iii) の条件に当てはまる。

[6] 選択肢 F. $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1$

$x=0$ のとき $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ であり, これは有理数でない。また, $x \neq 0$ のとき, この直線の式を変形して両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}\sqrt{2}x-1 &= \sqrt{3}y \Rightarrow (\sqrt{2}x-1)^2 = 3y^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 3y^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{2x^2 - 3y^2 + 1}{2x}\end{aligned}$$

となるから, この直線がある有理点 $(x, y) = (p, q)$ ($p \neq 0$) を通ると仮定すると, $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。したがって, (iv) の条件に当てはまる。

[7] 選択肢 G. $\sqrt{2}x+3y=\sqrt{2}$

$y=0$ のとき $x=1$ であるから, この直線は格子点 $(x, y) = (1, 0)$ を通ることがわかる。一方, $y \neq 0$ のとき, この直線の式の両辺を $\sqrt{2}$ 倍して変形すると

$$2x+3\sqrt{2}y=2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{-2x+2}{3y}$$

となるから, この直線がある有理点 $(x, y) = (p, q)$ ($q \neq 0$) を通ると仮定すると, $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。したがって, (i) の条件に当てはまる。

[8] 選択肢 H. $2\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=\sqrt{2}$

$y=0$ のとき $x=\frac{1}{2}$ であるから, この直線は有理点 $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通ることがわかる。一方, $y \neq 0$ のとき, この直線の式の両辺を $\sqrt{2}$ 倍して変形すると

$$4x-\sqrt{6}y=2 \Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{4x-2}{y}$$

となるから, この直線がある有理点 $(x, y) = (p, q)$ ($q \neq 0$) を通ると仮定すると, $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。したがって, (iii) の条件に当てはまる。

以上 [1]～[8] より, それぞれの条件に当てはまる選択肢は

(i) D, G (ii) C (iii) E, H (iv) F

であることがわかる。

(答) (i) D, G (ii) C (iii) E, H (iv) F

(2)

(iv) で選んだ直線 F. $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1$ がどの有理点も通らないことの証明は (1) の [6] の通りである。

(証明終)

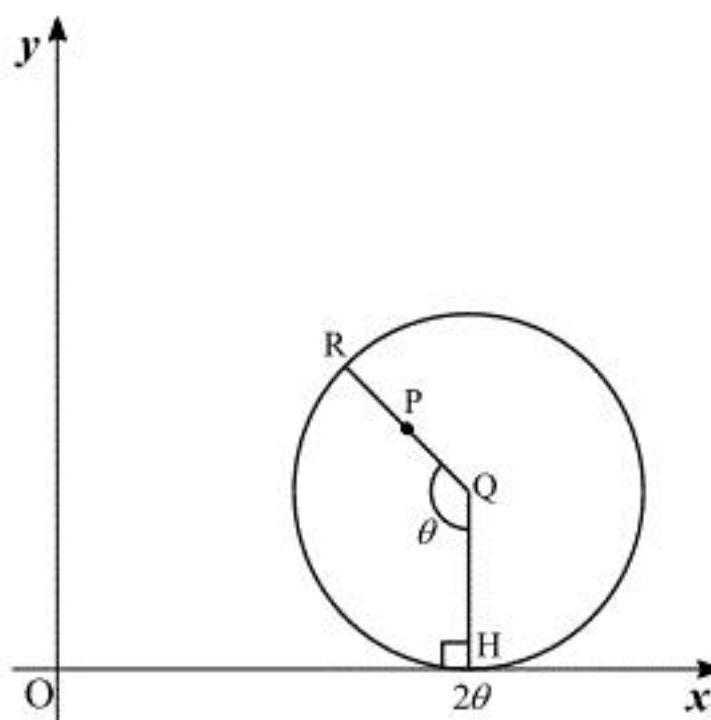
【解答】

(1)	あ	い	ア	イ			
	D	J	2	2			
(2)	ウ	エ	オ				
	4	1	2				
(3)	カ	キ	ク	ケ	コ		
	1	3	1	3	3		

【解説】

(1)

円板 D が初めの位置から角度 θ だけ回転したとき、以下の図のようになる。



このとき、上図のように円板の中心を Q 、円板と x 軸との接点を H 、線分 QP の延長と円板との交点を R とおく。ここで、点 Q の x 座標は中心角 θ である弧 HR の長さと同じから、点 Q の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2\theta \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる。また、 QP の長さは 1 であり、直線 QP と x 軸正の向きと成す角の大きさは $\frac{3}{2}\pi - \theta$ で

あるから、 $\overrightarrow{QP}$ は

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

と表せる。以上より、点 P の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\ &= \begin{pmatrix} 2\theta \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\theta - \sin\theta \\ 2 - \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって、点 P の座標は $(-\sin\theta + 2\theta, -\cos\theta + 2)$ である。

(2)

曲線 C 上の点 $P(x(\theta), y(\theta))$ は

$$\begin{cases} x(\theta) = 2\theta - \sin\theta \\ y(\theta) = 2 - \cos\theta \end{cases}$$

と媒介変数表示できる。このとき、それぞれの関数を微分すると

$$\begin{cases} x'(\theta) = 2 - \cos\theta \\ y'(\theta) = \sin\theta \end{cases}$$

となり、ここで $0 \leq \theta \leq 2\pi$ より、 $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であるから

$$x'(\theta) = 2 - \cos\theta > 0$$

が成り立つ。よって、曲線 C の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	π	...	2π
$x'(\theta)$		+	+	+	
$y'(\theta)$		+	0	-	
(x, y)	(0, 1)	↗	(2π, 3)	↘	(4π, 1)

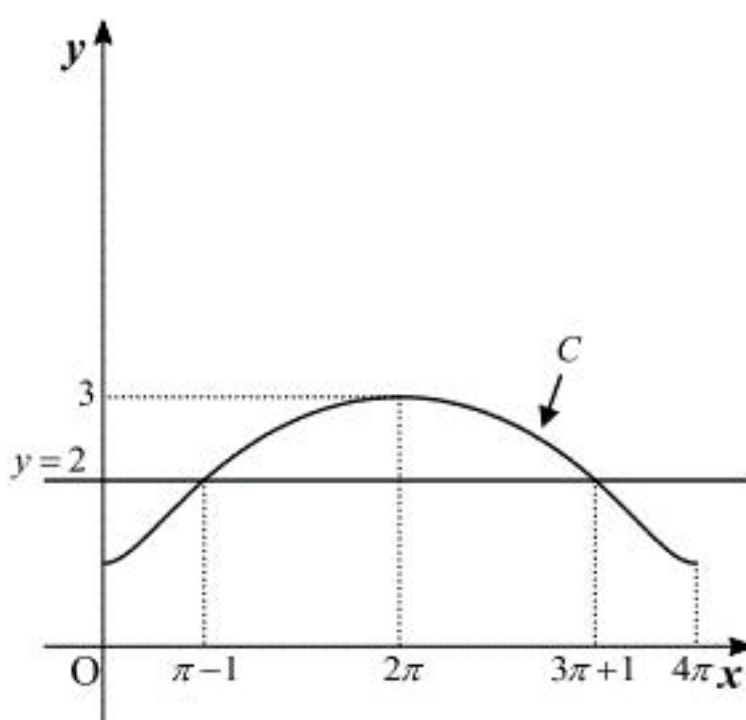
また、 $y(\theta) = 2$ となるのは

$$\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

のときであり、 $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1$ 、 $x\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 3\pi + 1$ であるから、直線 $y = 2$ と曲線 C の交点は

$$(\pi - 1, 2), (3\pi + 1, 2)$$

である。これより、曲線 C の概形は以下の図のようになる。



上図より、曲線 C と直線 $y = 2$ で囲まれた面積を S とおくと、その値は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\pi-1}^{3\pi+1} (y(\theta) - 2) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (2 - \cos\theta - 2) \cdot (2 - \cos\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (\cos^2\theta - 2\cos\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta - 2\sin\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= \left(\frac{3}{4}\pi + 2 \right) - \left(\frac{\pi}{4} - 2 \right) \\ &= 4 + \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

曲線 C 上の点 P における接線の傾き $\frac{dy}{dx}$ は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\sin\theta}{2 - \cos\theta} \quad (\because x'(\theta) > 0)$$

である。ここで、 $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{2 - \cos\theta}$ とおくと、その導関数は

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{\cos\theta(2 - \cos\theta) - \sin\theta \cdot \sin\theta}{(2 - \cos\theta)^2} \\ &= \frac{2\cos\theta - 1}{(2 - \cos\theta)^2} \end{aligned}$$

となるから、 $f(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$f'(\theta)$		+	0	-	0	+	
$f(\theta)$	0	↗	最大	↘	最小	↗	0

上表より、 $f(0) = f(2\pi) = 0$ であるから、関数 $f(\theta)$ 、すなわち、 P における C の接線の傾き

は、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

をとることがわかる。

【解答】

(1)	サ	シ	ス				
	-1	4	-2				
(2)	セ	ソ					
	26	3					
(3)	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
	2	3	-1	1	6	6	1

【解説】

(1)

複素数 $z_n = \cos \frac{\pi}{3^n} + i \sin \frac{\pi}{3^n}$ について

$$\begin{aligned}\arg(z_1 z_3 \cdots z_{2n-1}) &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3^3} + \cdots + \frac{\pi}{3^{2n-1}} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{2(n-1)}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{2n}}}{1 - \frac{1}{3^2}} \\ &= \frac{3}{8} (1 - 3^{-2n}) \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arg(z_2 z_4 \cdots z_{2n}) &= \frac{\pi}{3^2} + \frac{\pi}{3^4} + \cdots + \frac{\pi}{3^{2n}} \\ &= \frac{\pi}{3^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{2(n-1)}} \right) \\ &= \frac{\pi}{3^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{2n}}}{1 - \frac{1}{3^2}} \\ &= \frac{1}{8} (1 - 3^{-2n}) \pi\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、求める偏角 α は

$$\begin{aligned}\alpha &= \arg \left(\frac{z_2 z_4 \cdots z_{2n}}{z_1 z_3 \cdots z_{2n-1}} \right) \\ &= \arg(z_2 z_4 \cdots z_{2n}) - \arg(z_1 z_3 \cdots z_{2n-1}) \\ &= \frac{1}{8} (1 - 3^{-2n}) \pi - \frac{3}{8} (1 - 3^{-2n}) \pi \\ &= -\frac{1}{4} (1 - 3^{-2n}) \pi\end{aligned}$$

となる。

(2)

集合 S の要素について、 $4^0, 4^1$ を含む和で表されるか否かで場合分けして考える。[1] $4^0, 4^1$ をどちらも含む和で表される場合

$4^k (k \geq 2)$ は 8 の倍数であるため、このような S の要素は 8 で割って 5 余る数である。したがって、8 の倍数は存在しない。また、集合 S に属する異なる 2 個以上の整数の和の中で、 $4^0, 4^1$ をどちらも含むものの総数は、それぞれ $4^k (k = 2, 3, 4, 5, 6)$ が含まれるか否かを考えることで

$$2^5 = 32 \text{ (個)}$$

であることがわかるから、この条件を満たす要素の和を 8 で割った余りは

$$5 \cdot 32 \equiv 0 \pmod{8}$$

である。

[2] 4^0 は含み、 4^1 は含まない和で表される場合

同様に考えて、このような S の要素は 8 で割って 1 余る数である。したがって、8 の倍数は存在しない。また、集合 S に属する異なる 2 個以上の整数の和の中で、 4^0 は含み、 4^1 は含まないものの総数は、それぞれ $4^k (k = 2, 3, 4, 5, 6)$ が含まれるか否かを考えて、さらにいずれも含まない場合を除くことで

$$2^5 - 1 = 31 \text{ (個)}$$

であることがわかるから、この条件を満たす要素の和を 8 で割った余りは

$$1 \cdot 31 \equiv 7 \pmod{8}$$

である。

[3] 4^1 は含み、 4^0 は含まない和で表される場合

同様に考えて、このような S の要素は 8 で割って 4 余る数である。したがって、8 の倍数は存在しない。また、同様に考えて、集合 S に属する異なる 2 個以上の整数の和の中で、 4^1 は含み、 4^0 は含まないものの総数は

$$2^5 - 1 = 31 \text{ (個)}$$

であることがわかるから、この条件を満たす要素の和を 8 で割った余りは

$$4 \cdot 31 \equiv 4 \pmod{8}$$

である。

[4] $4^0, 4^1$ をどちらも含まない和で表される場合

同様に考えて、このような S の要素は 8 の倍数である。また、集合 S に属する異なる 2 個以上の整数の和の中で、 $4^0, 4^1$ をどちらも含まないものの総数は、それぞれ $4^k (k = 2, 3, 4, 5, 6)$ が含まれるか否かを考えて、さらに、1 つしか含まない場合と、いずれも含まない場合を除くことで

$$2^5 - 5 - 1 = 26 \text{ [個]}$$

であることがわかるから、この条件を満たす要素の和を 8 で割った余りは

$$0 \cdot 26 \equiv 0 \pmod{8}$$

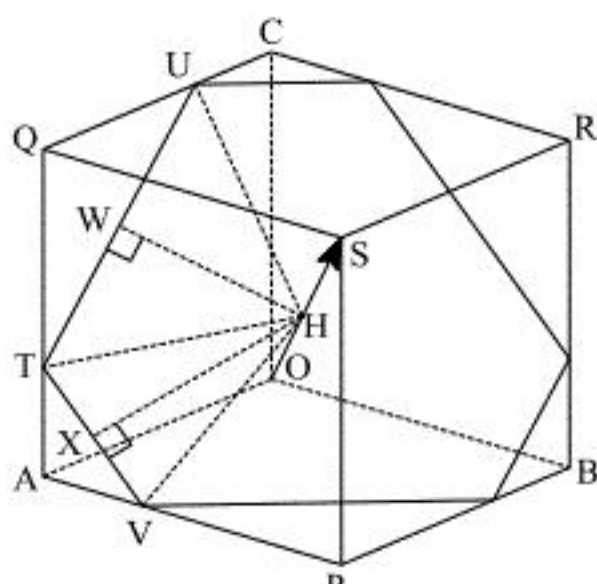
である。

以上[1]～[4]より、 S の要素の中で 8 の倍数は全部で 26 個あり、 S のすべての要素の和を 8 で割ったときの余りは

$$7 + 4 \equiv 3 \pmod{8}$$

より、3 であることがわかる。

(3)

下図のように、断面 D 上の点を定める。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

まず、 $\overrightarrow{TH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すことを考える。点 H は直線 OS 上の点であるから、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OH} = k \overrightarrow{OS} \left(= k (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \right)$$

とおくことができる。また、点 T は線分 AQ を $t : (1-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} \\ &= \vec{a} + t \vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、直線 OS と直線 TH は直交することから、 k は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{TH} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot ((k-1)\vec{a} + k\vec{b} + (k-t)\vec{c}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1) + k + (k-t) &= 0 \left(\because |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \right) \\ \Leftrightarrow k &= \frac{t+1}{3}\end{aligned}$$

と求まる。したがって、線分 TH の長さの 2 乗は

$$\begin{aligned}TH^2 &= |\overrightarrow{TH}|^2 \\ &= (k-1)^2 + k^2 + (k-t)^2 \\ &= \left(\frac{t-2}{3} \right)^2 + \left(\frac{t+1}{3} \right)^2 + \left(\frac{-2t+1}{3} \right)^2 \\ &= \frac{2}{3} (t^2 - t + 1)\end{aligned}$$

であることがわかる。また、 D の周上の点と H の距離の最小値は、点 A, B, C に関する対称性より、上図において

線分 WH の長さ または 線分 XH の長さ

であるが、三平方の定理より

$$WH^2 = TH^2 - TW^2, XH^2 = TH^2 - TX^2$$

となり、ここで $0 < t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$TW \left(= \frac{\sqrt{2}}{2} (1-t) \right) \geq TX \left(= \frac{\sqrt{2}}{2} t \right)$$

であることから、最小値は線分 WH の長さに等しいことがわかる。そして、この値は

$$\begin{aligned}WH &= \sqrt{TH^2 - TW^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} (t^2 - t + 1) - \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (1-t) \right\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} (t+1)\end{aligned}$$

である。