

1

〔解答〕

(1)	ア	イ								
	1	4								
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	6	-9	9	3	4	3	4	10	6	2
(3)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ			
	-3	4	9	4	23	80	15			

〔解説〕

(1)

$$45^{\circ} < A < 90^{\circ} \text{ かつ } \tan 2A = -\frac{\sqrt{15}}{7} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \cos 2A &= -\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2A}} \\ &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \sqrt{\frac{1+\cos 2A}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と $\cos A$ が計算できる。

(2)

$\triangle APQ$ について余弦定理より,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos A \\ &= 4x^2 + (3-x)^2 - x(3-x) \\ &= 6x^2 - 9x + 9 \end{aligned}$$

と PQ^2 を x で表せ, また

$$PQ^2 = 6\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{45}{8}$$

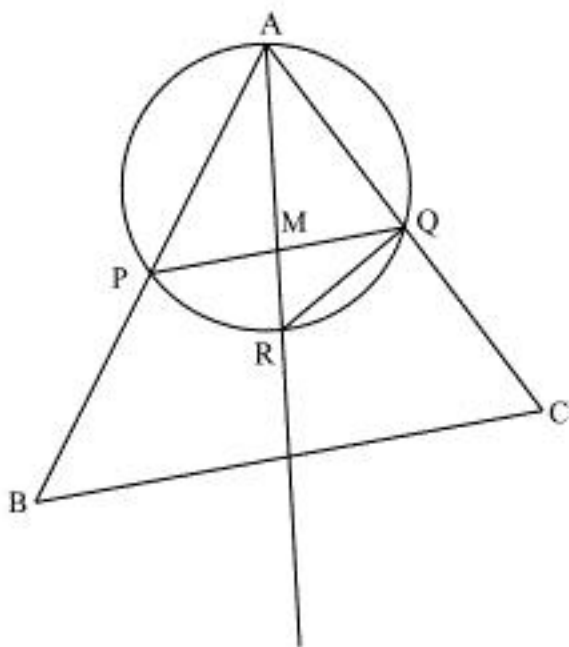
と平方完成できるから, PQ は $x = \frac{3}{4}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}\sqrt{10}$ をとる。また, このとき $\triangle APQ$ の外

接円の半径を r とおくと, $\triangle APQ$ について正弦定理より,

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{\sin A} &= 2r \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4}\sqrt{10}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}} &= 2r \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

と r の値が求められる。

(3)



$\triangle APQ$ について余弦定理より, $\cos \angle APQ = \frac{AP^2 + PQ^2 - AQ^2}{2 \cdot AP \cdot PQ}$ が成り立つ。(2)より

$PQ^2 = 6x^2 - 9x + 9$ が成り立つから, $\triangle AMP$ について余弦定理より,

$$\begin{aligned} AM^2 &= AP^2 + PM^2 - 2 \cdot AP \cdot PM \cdot \cos \angle APQ \\ &= AP^2 + \left(\frac{1}{2}PQ\right)^2 - 2 \cdot AP \cdot \frac{1}{2}PQ \cdot \frac{AP^2 + PQ^2 - AQ^2}{2 \cdot AP \cdot PQ} \\ &= 4x^2 + \frac{1}{4}(6x^2 - 9x + 9) - \frac{1}{2}\{4x^2 + (6x^2 - 9x + 9) - (3-x)^2\} \\ &= x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

と AM^2 を x で表せ,

$$AM^2 = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{135}{64}$$

と平方完成できるから, AM は $x = \frac{3}{8}$ のとき最小値 $\frac{3}{8}\sqrt{15}$ をとる。また, 対頂角より

$$\angle AMP = \angle QMR$$

であり, また円周角より

$$\angle APQ = \angle ARQ$$

であるから,

$$\triangle AMP \sim \triangle QMR$$

であり, $PM:MR = AM:MQ$ が成り立つため,

$$\begin{aligned} MR &= \frac{PM \cdot MQ}{AM} \\ &= \frac{\left\{\frac{1}{2}\sqrt{6 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 - 9 \cdot \left(\frac{3}{8}\right) + 9}\right\}^2}{\frac{3}{8}\sqrt{15}} \\ &= \frac{23}{80}\sqrt{15} \end{aligned}$$

と MR が求められる。

2

〔解答〕

(1)	ト	ナ	ニ	ヌ		
	1	2	2	-2		
(2)	(i)	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
		-2	3	2	1	6
	(ii)	ヘ	ホ	マ	ミ	
		1	-5	6	-18	

〔解説〕

(1)

与えられた連立不等式

$$\begin{cases} y > 1 \\ \frac{1 - \log_y(x^2 - 1) - \log_y 2}{2 - \log_y y - \log_x 2} > 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たすためには、真数条件と底の条件より、

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < x$$

であることが必要である。よって、 x, y が連立不等式①を満たすならば

$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たすことがわかる。また、①の第2式を同値変形すると

$$\frac{1 - \log_y(x^2 - 1) - \log_y 2}{2 - \log_y y - \log_x 2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_y \frac{y}{2(x^2 - 1)}}{\log_x \frac{x^2}{2y}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_y \frac{y}{2(x^2 - 1)} \cdot \log_x \frac{x^2}{2y} > 0$$

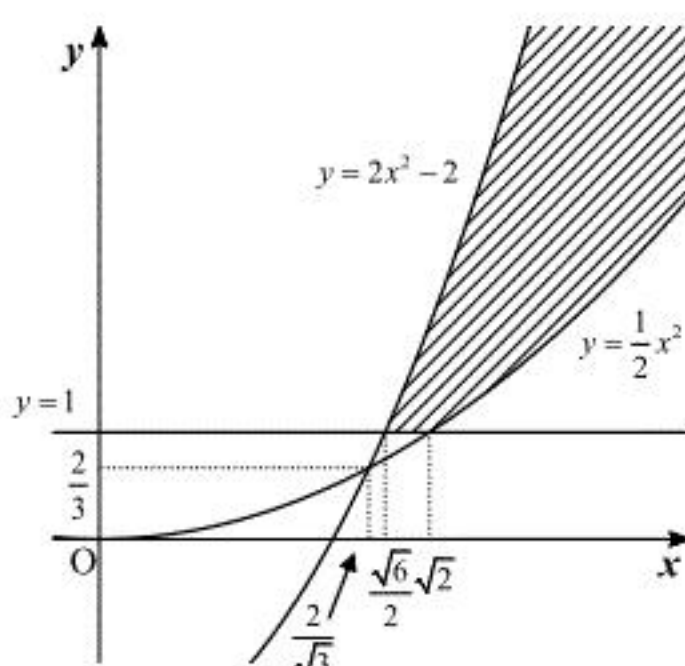
となる。ここで、②より、

$$\log_y \frac{y}{2(x^2 - 1)} \cdot \log_x \frac{x^2}{2y} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 2y \\ y > 2(x^2 - 1) \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x^2 < 2y \\ y < 2(x^2 - 1) \end{cases}$$

と変形できる。ここで、曲線 $x^2 = 2y$ と $y = 2(x^2 - 1)$ の交点の y 座標は、 x^2 を消去すると

$$\begin{aligned} y &= 2(2y - 1) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

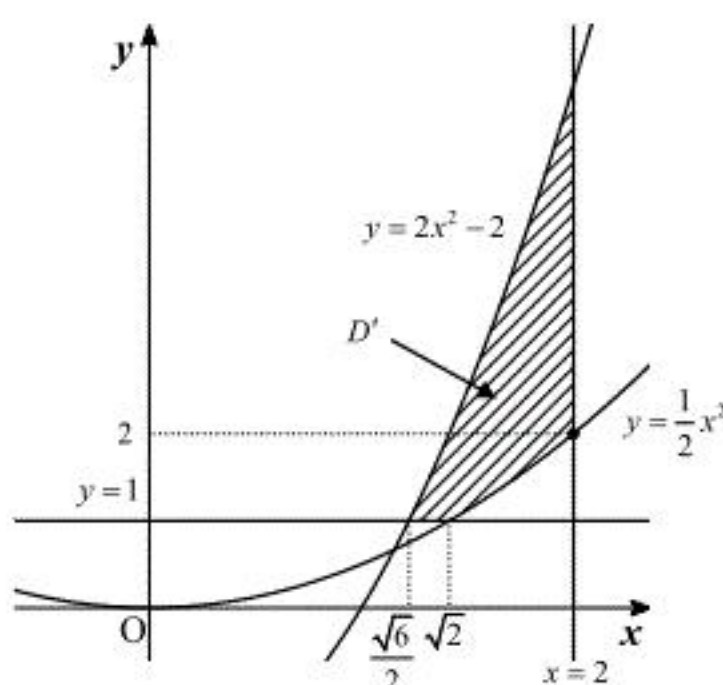
である。以上より、 $x > 0, y > 0$ の範囲において連立不等式①を満たす (x, y) の範囲を図示すると以下の斜線部ようになる。以上より、 $x > 0, y > 0$ が連立不等式①を満たすための必要十分条件は

$$\begin{cases} y > 1 \\ \frac{1}{2}x^2 < y < 2x^2 + (-2) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。

(2)

(i)

(1)の図の斜線部の領域のうち $0 < x \leq 2$ を満たす部分とその境界線をあわせた領域 D' は下図のようになる。上図より、 D' の面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^2 (2x^2 - 2 - 1) dx - \int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x \right]_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^2 - \left[\frac{1}{6}x^3 - x \right]_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^2 \\ &= \left(\frac{16}{3} - 6 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{6}}{8} - 3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \right) - \left(\frac{4}{3} - 2 \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} \right) \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

$y - 10x = k$ とおく。これは $y = 10x + k$ と変形でき、傾き 10、 y 切片 k の直線を表す。このとき、点 (x, y) が D' 内を動くときの $y - 10x$ の最大値、最小値は、直線 $y = 10x + k$ が領域 D' と共有点をもつときの k の最大値、最小値に帰着できる。ここで、(2)(i)の図において、領域 D' の境界である $y = 2x^2 - 2$ の $x = 2$ での傾きは $y' = 4x$ より

$$4 \cdot 2 = 8$$

である。よって、 $y = 2x^2 - 2$ の $x = 2$ での傾きは $y = 10x + k$ の傾き 10 より小さい。これより、

(2)(i)の図から、 k が最大値をとるのは直線 $y = 10x + k$ が点 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 1 \right)$ を通るときであり、その

値は

$$\begin{aligned} k &= 1 - 10 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \\ &= 1 - 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。また、 k が最小値をとるのは直線 $y = 10x + k$ が点 $(2, 2)$ を通るときであり、その値は

$$\begin{aligned} k &= 2 - 10 \cdot 2 \\ &= -18 \end{aligned}$$

となる。

3

【解答】

(1)	$\triangle$				
	14				
(2)	$\times$	$\oplus$	γ	$\square$	
	3	6	12	2	

【解説】

(1)

i, j, k, ℓ は正の整数より, $\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k}$ は整数である。まず, $i \leq j \leq k$ として, 条件を満たす

(i, j, k) の組を求める。このとき, i の値で場合分けをする。

[1] $i=1$ のとき

$\frac{1}{j} + \frac{1}{k}$ は整数であり, $1 \leq j \leq k \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{j} \leq 1$ である。よって

$$\frac{1}{j} + \frac{1}{k} = 1, 2$$

である。

[i] $\frac{1}{j} + \frac{1}{k} = 1$ のとき

$$\frac{1}{j} + \frac{1}{k} = 1$$

$$\Leftrightarrow j+k = jk$$

$$\Leftrightarrow (j-1)(k-1) = 1$$

となり, これを満たすのは $(j, k) = (2, 2)$ のみである。

[ii] $\frac{1}{j} + \frac{1}{k} = 2$ のとき

$$\frac{1}{j} + \frac{1}{k} = 2$$

$$\Leftrightarrow j+k = 2jk$$

$$\Leftrightarrow (2j-1)(2k-1) = 1$$

となり, これを満たすのは $(j, k) = (1, 1)$ のみである。

[2] $i=2$ のとき

$\frac{1}{2} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k}$ が整数であり, $2 \leq j \leq k \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{j} \leq \frac{1}{2}$ である。よって

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} = 1$$

であり, これを変形して

$$\frac{1}{j} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(j+k) = jk$$

$$\Leftrightarrow (j-2)(k-2) = 4$$

となり, これを満たすのは $(j, k) = (3, 6), (4, 4)$ である。

[3] $i=3$ のとき

$\frac{1}{3} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k}$ が整数であり, $3 \leq j \leq k \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{j} \leq \frac{1}{3}$ である。よって

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} = 1$$

であり, これを変形して

$$\frac{1}{j} + \frac{1}{k} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(j+k) = 2jk$$

$$\Leftrightarrow (2j-3)(2k-3) = 9$$

となる。これを満たすのは $(j, k) = (3, 3)$ のみである。

[4] $i \geq 4$ のとき

このとき,

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} \leq \frac{3}{4}$$

となるので, 不適である。

以上[1], [2], [3]より, $i \leq j \leq k$ のもとで条件を満たす (i, j, k) の組は

$$(1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$$

であり, 1つの i, j, k の組に対した1つ ℓ の値が定まる。よって大小関係が $i \leq j \leq k$ ではないものも考慮すると, (i, j, k, ℓ) の組は

$$1+_3C_1+3!+_3C_1+1=14 \text{ (通り)}$$

存在する。

(2)

①を満たす (i, j, k, ℓ) の組のうち, i, j, k の順番を入れ替えると同じものを除くと,

$$(1, 1, 1, 6), (1, 2, 2, 7), (2, 3, 6, 12), (2, 4, 4, 11), (3, 3, 3, 10)$$

の5通りである。3次関数 $f(x)$ に対し

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

と計算できる。 $f(x)$ が極値をもつから, 2次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D として

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow a_2^2 - 3a_3a_1 > 0$$

となる。このときの $f'(x) = 0$ の異なる2解を $x = \alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると, 解と係数の関係より

$$\alpha\beta = \frac{a_1}{3a_3}$$

である。これが整数となる必要があるから, a_1 は3の倍数である。これを満たしうる

(i, j, k, ℓ) の組は $(1, 1, 1, 6), (2, 3, 6, 12)$ である。ここで, $(1, 1, 1, 6)$ について $a_1 = 6$ より

$a_2 = a_3 = a_0 = 1$ となるが, $a_2^2 - 3a_3a_1 = -17 < 0$ となるので不適である。よって $(2, 3, 6, 12)$ のみ適する。以下, a_1 の値で場合分けをする。

[1] $a_1 = 3$ のとき

$\frac{a_1}{3a_3}$ が整数となる a_3 は存在しないので不適である。

[2] $a_1 = 6$ のとき

$a_3 = 2$ のとき $\frac{a_1}{3a_3}$ は整数となり, また $a_2 = 12, a_0 = 3$ のとき $a_2^2 - 3a_3a_1 > 0$ となる。よって

このとき $f(x)$ は極大値と極小値をもち, かつ極値をとる2つの x の値の積は整数となる。

[3] $a_1 = 12$ のとき

$a_3 = 2$ のとき $\frac{a_1}{3a_3}$ は整数となるが, このとき $a_2^2 - 3a_3a_1 > 0$ を満たす a_2 が存在しないので,

不適である。

以上[1], [2], [3]より, 条件を満たすのは $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (3, 6, 12, 2)$ である。