

1

【解答】

|     |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|
| (1) | ア  | イ  | ウ  | エ  |
|     | -3 | 2  | -6 | 5  |
| (2) | オ  | カ  | キ  | ク  |
|     | 9  | -5 | 81 | 21 |
| (3) | ケ  | コ  | サ  |    |
|     | 3  | 17 | 2  |    |
| (4) | シ  | ス  | セ  |    |
|     | 9  | 2  | 5  |    |

【解説】

(1)

$\log_3 x = t$  とおくと、

$$\log_3 x^3 = 3 \log_3 x$$

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{243}{x^6} &= \log_3 3^5 - \log_3 x^6 \\ &= 5 - 6 \log_3 x \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$  は  $t$  の式で

$$\begin{aligned} (\log_3 x)^3 - \frac{1}{6} (\log_3 x^3)^2 + \log_3 \frac{243}{x^6} &= t^3 - \frac{1}{6} (3t)^2 + 5 - 6t \\ &= t^3 - \frac{3}{2} t^2 - 6t + 5 \end{aligned}$$

と表せる。

(2)

$\log_3 x = t$  より、 $\frac{1}{9} \leq x \leq 81$  のとき  $-2 \leq t \leq 4$  が成り立つ。 $g(t) = t^3 - \frac{3}{2} t^2 - 6t + 5$  として  $g(t)$

の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 3t - 6 \\ &= 3(t+1)(t-2) \end{aligned}$$

となるため、 $g(t)$  の増減表は次のようになる。

|         |         |     |    |     |    |     |        |
|---------|---------|-----|----|-----|----|-----|--------|
| $t$     | -2      | ... | -1 | ... | 2  | ... | 4      |
| $g'(t)$ |         | +   | 0  | -   | 0  | +   |        |
| $g(t)$  | $g(-2)$ | ↗   | 極大 | ↘   | 極小 | ↗   | $g(4)$ |

ここで、

$$\begin{aligned} g(-2) &= 3 \\ g(2) &= -5 \end{aligned}$$

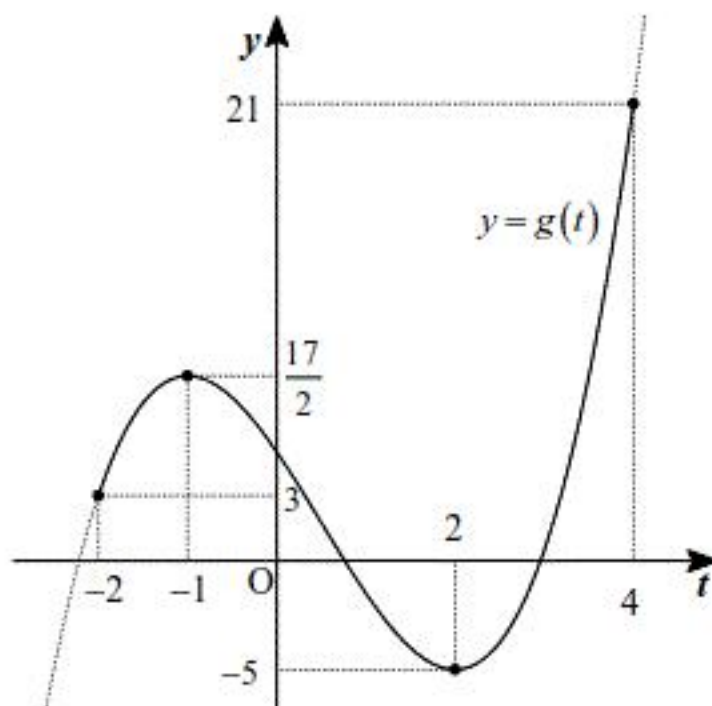
であるから、 $t = 2 \Leftrightarrow x = 9$  のとき  $f(x)$  は最小値  $-5$  をとる。また、

$$\begin{aligned} g(-1) &= \frac{17}{2} \\ g(4) &= 21 \end{aligned}$$

であるから、 $t = 4 \Leftrightarrow x = 81$  のとき  $f(x)$  は最大値  $21$  をとる。

(3)

(2)より、 $y = g(t)$  のグラフは以下の図のようになる。



$t = \log_3 x$  は単調増加関数であるから、 $t$  の値が1つ決まると  $x$  の値も1つ決まる。したがって、方程式  $f(x) = a$  が異なる3個の実数解をもつ条件は、曲線  $y = g(t)$  ( $-2 \leq t \leq 4$ ) と直線  $y = a$  が異なる3点で交わる条件と一致する。前図より、求める  $a$  の範囲は、

$$3 \leq a < \frac{17}{2}$$

である。

(4)

与えられた方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= -6 \log_3 x + b \\ \Leftrightarrow (\log_3 x)^3 - \frac{1}{6} (\log_3 x^3)^2 + \log_3 \frac{243}{x^6} &= -6 \log_3 x + b \\ \Leftrightarrow t^3 - \frac{3}{2} t^2 - 6t + 5 &= -6t + b \\ \Leftrightarrow t^3 - \frac{3}{2} t^2 + 5 &= b \end{aligned}$$

となる。 $h(t) = t^3 - \frac{3}{2} t^2 + 5$  として  $h(t)$  の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} h'(t) &= 3t^2 - 3t \\ &= 3t(t-1) \end{aligned}$$

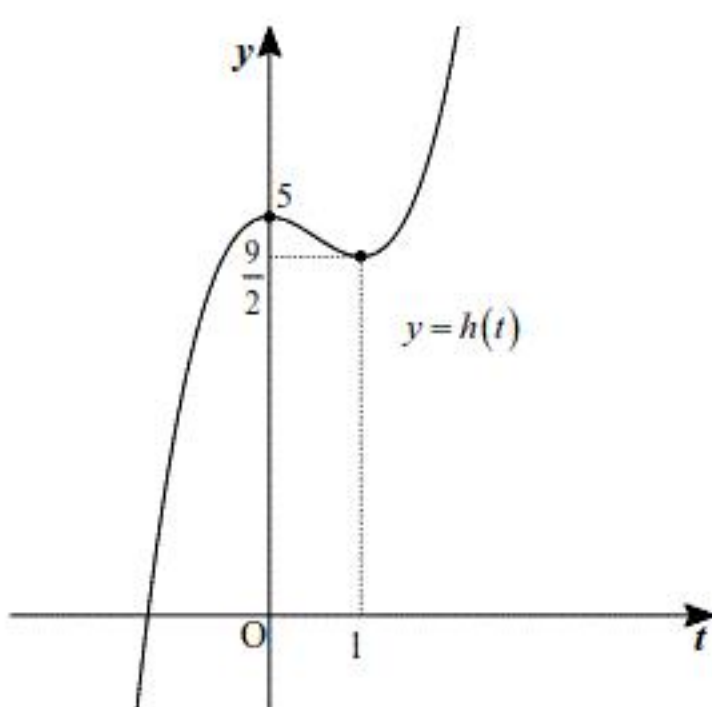
となるため、 $h(t)$  の増減表は次のようになる。

|         |         |     |    |     |    |     |        |
|---------|---------|-----|----|-----|----|-----|--------|
| $t$     | -2      | ... | 0  | ... | 1  | ... | 4      |
| $h'(t)$ |         | +   | 0  | -   | 0  | +   |        |
| $h(t)$  | $h(-2)$ | ↗   | 極大 | ↘   | 極小 | ↗   | $h(4)$ |

ここで、

$$\begin{cases} h(-2) = -9 \\ h(0) = 5 \\ h(1) = \frac{9}{2} \\ h(4) = 45 \end{cases}$$

であるから、 $y = h(t)$  のグラフは以下の図のようになる。



(3)と同様に考えると、方程式  $f(x) = -6 \log_3 x + b$  が異なる3個の実数解をもつ条件は、曲線  $y = h(t)$  ( $-2 \leq t \leq 4$ ) と直線  $y = b$  が異なる3点で交わる条件と一致する。前図より、求める  $b$  の範囲は、

$$\frac{9}{2} < b < 5$$

である。

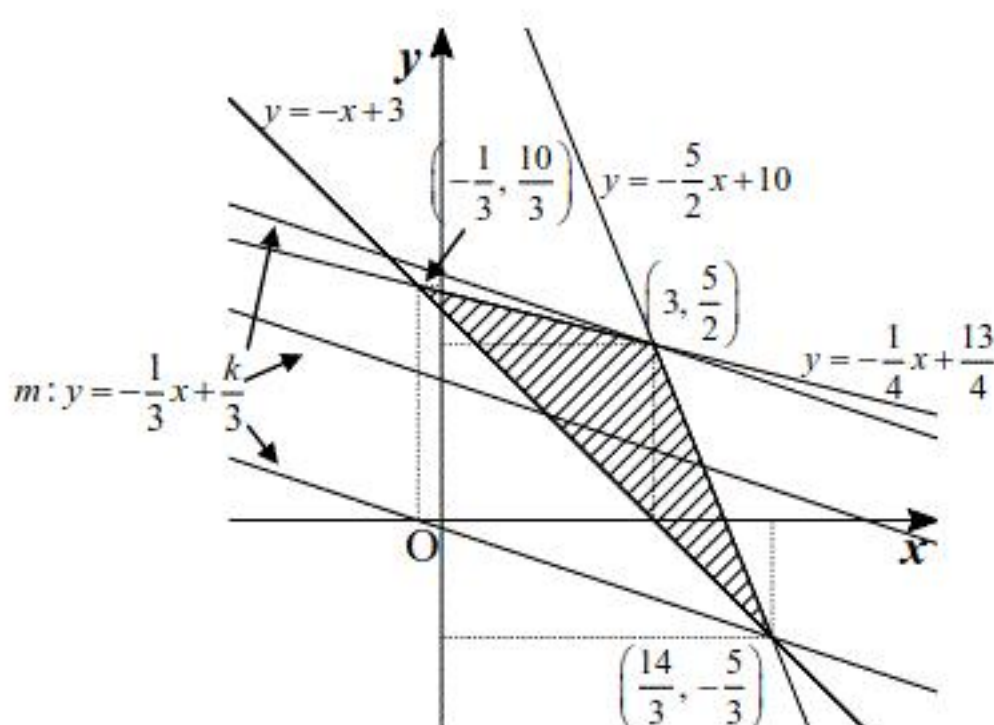
【解答】

|     |   |   |    |    |    |    |   |    |   |    |   |
|-----|---|---|----|----|----|----|---|----|---|----|---|
| (1) | ソ | タ | チ  | ツ  | テ  | ト  | ナ | ニ  | ヌ | ネ  | ノ |
|     | 3 | 5 | 2  | 21 | 2  | 14 | 3 | -5 | 3 | -1 | 3 |
| (2) | ハ | ヒ | フ  | ヘ  | ホ  | マ  |   |    |   |    |   |
|     | 1 | 3 | 10 | 4  | -1 | 1  |   |    |   |    |   |

【解説】

(1)

領域  $D$  を図示すると以下の斜線部分となる。ただし境界を含む。



$k = x + 3y$  は  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{k}{3}$  と変形でき、これは傾き  $-\frac{1}{3}$ 、 $y$  切片  $\frac{k}{3}$  の直線を表す。この直線を  $m$  とおく。このとき、点  $(x, y)$  が  $D$  内を動くときの  $k = x + 3y$  の最大値、最小値は、直線  $m$  が領域  $D$  と共有点をもつときの  $k$  の最大値、最小値に帰着できる。前図において、直線  $m$  とその他の直線の傾きを比較すると、 $-\frac{5}{2} < -1 < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$  であることに注意する。

[1]  $k$  の最大値について

直線  $m$  が点  $(3, \frac{5}{2})$  を通るとき、 $k$  は最大値として  $3 + 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{21}{2}$  をとる。

[2]  $k$  の最小値について

直線  $m$  が点  $(\frac{14}{3}, -\frac{5}{3})$  を通るとき、 $k$  は最小値として  $\frac{14}{3} + 3 \cdot (-\frac{5}{3}) = -\frac{1}{3}$  をとる。

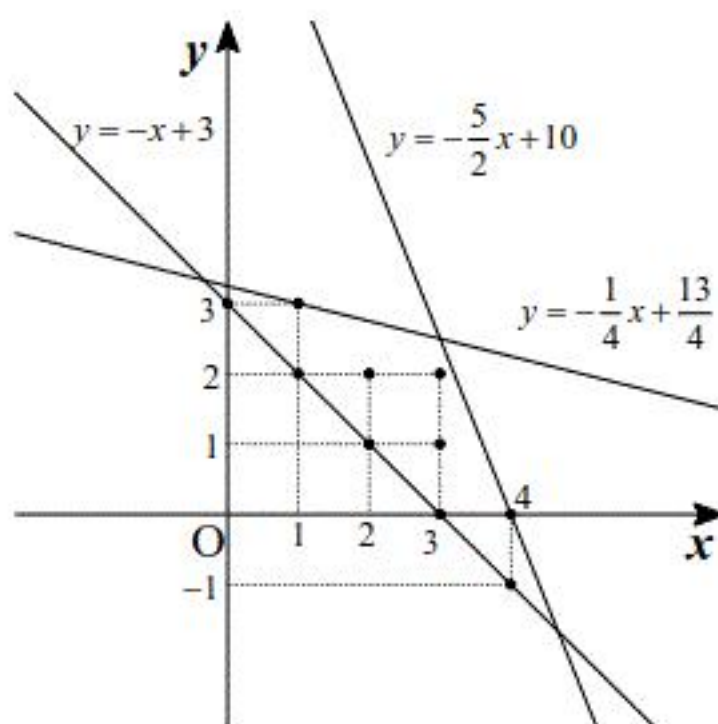
以上[1], [2]より、点  $(x, y)$  が  $D$  内を動くとき、 $k$  は

$$(x, y) = (3, \frac{5}{2}) \text{ のとき最大値 } \frac{21}{2}, (x, y) = (\frac{14}{3}, -\frac{5}{3}) \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{3}$$

をとることがわかる。

(2)

$D$  内の格子点を図示すると以下ようになる。



直線  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{k}{3}$  がこれらの格子点を通るとき、 $(x, y, k)$  の組は

$$(x, y, k) = (0, 3, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 10), (2, 1, 5), (2, 2, 8), \\ (3, 0, 3), (3, 1, 6), (3, 2, 9), (4, -1, 1), (4, 0, 4)$$

となる。よって、 $(x, y) = (1, 3)$  のとき、 $k$  は最大値 13 をとり、 $(x, y) = (4, -1)$  のとき、 $k$  は最小値 1 をとることが分かる。

【解答】

|     |              |              |              |              |              |              |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (1) | <div>ミ</div> | <div>ム</div> | <div>メ</div> | <div>モ</div> | <div>ヤ</div> | <div>ユ</div> |
|     | 30           | 18           | 12           | 9            | 0            | 8            |
| (2) | <div>ヨ</div> | <div>ラ</div> | <div>リ</div> | <div>ル</div> | <div>レ</div> |              |
|     | -1           | 6            | -5           | -21          | 2            |              |

【解説】

(1)

(i)

2, 3, 3, 4, 4 の 5 つの数字から 4 つを選ぶ方法は、 $(2, 3, 3, 4), (2, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 4)$  の 3 通りである。各組み合わせについて並べ方を考えると、できる自然数の総数は

$$\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!2!} = 30$$

と計算できる。

(ii)

$(2, 3, 3, 4), (2, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 4)$  の各組み合わせについて 2 の倍数となる並べ方を考える。

[1]  $(2, 3, 3, 4)$  について

1 の位が 2 となる並べ方の総数は残りの 3, 3, 4 の並べ方の総数に等しいので 3 通りである。同様に、1 の位が 4 となる並べ方も 3 通りである。よって  $(2, 3, 3, 4)$  について 2 の倍数となる並べ方は

$$3+3=6$$

通りある。

[2]  $(2, 3, 4, 4)$  について

1 の位が 2 となる並べ方の総数は残りの 3, 4, 4 の並べ方の総数に等しいので 3 通りである。また、1 の位が 4 となる並べ方の総数は残りの 2, 3, 4 の並べ方の総数に等しいので  $3!=6$  通りである。よって、 $(2, 3, 4, 4)$  について 2 の倍数となる並べ方は

$$3+6=9$$

通りある。

[3]  $(3, 3, 4, 4)$  について

1 の位が 4 となる並べ方の総数は残りの 3, 3, 4 の並べ方の総数に等しいので 3 通りである。よって  $(3, 3, 4, 4)$  について 2 の倍数となる並べ方は 3 通りある。

以上 [1], [2], [3] より、2 の倍数の総数は  $6+9+3=18$  個である。

(iii)

一般に、ある数の各位の数の和が 3 の倍数であればその数は 3 の倍数となる。

$(2, 3, 3, 4), (2, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 4)$  の各組み合わせについて 4 つの数の総和が 3 の倍数となるのは  $(2, 3, 3, 4)$  のみである。よって 3 の倍数の総数は  $\frac{4!}{2!}=12$  個である。

(iv)

一般に、ある数の下 2 桁の数が 4 の倍数であればその数は 4 の倍数となる。ここで、2, 3, 4 から重複を許して 2 つ選んで作ることができる 4 の倍数は、24, 32, 44 である。

$(2, 3, 3, 4), (2, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 4)$  の各組み合わせについて下 2 桁がこれらのうちいずれかになる並べ方を考える。

[1]  $(2, 3, 3, 4)$  について

下 2 桁が 24 となる並べ方の総数は残りの 3, 3 の並べ方の総数に等しいので 1 通りである。また、下 2 桁が 32 となる並べ方の総数は残りの 3, 4 の並べ方の総数に等しいので 2 通りである。 $(2, 3, 3, 4)$  は 4 を 1 つしか含まないため下 2 桁が 44 となることはない。よって、 $(2, 3, 3, 4)$  について 4 の倍数となる並べ方は

$$1+2=3$$

通りある。

[2]  $(2, 3, 4, 4)$  について

下 2 桁が 24 となる並べ方の総数は残りの 3, 4 の並べ方の総数に等しいので 2 通りである。また、下 2 桁が 32 となる並べ方の総数は残りの 4, 4 の並べ方の総数に等しいので 1 通りである。また、下 2 桁が 44 となる並べ方の総数は残りの 2, 3 の並べ方の総数に等しいので 2 通りである。よって、 $(2, 3, 4, 4)$  について 4 の倍数となる並べ方は

$$2+1+2=5$$

通りある。

[3]  $(3, 3, 4, 4)$  について

$(3, 3, 4, 4)$  は 2 を含まないため、下 2 桁が 24, 32 となることはない。また、下 2 桁が 44 となる並べ方の総数は残りの 3, 3 の並べ方の総数に等しいので 1 通りである。よって  $(3, 3, 4, 4)$  について 4 の倍数となる並べ方は 1 通りある。

以上 [1], [2], [3] より、4 の倍数の総数は  $3+5+1=9$  個である。

(v)

一般に、ある数の各位の数の和が 9 の倍数であればその数は 9 の倍数となる。ここで、 $(2, 3, 3, 4), (2, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 4)$  の各組み合わせについて、4 つの数の総和はそれぞれ 12, 13, 14 となり、9 の倍数となるものは存在しない。よって 9 の倍数の総数は 0 個である。

(vi)

千の位が  $a$ 、百の位が  $b$ 、十の位が  $c$ 、一の位が  $d$  である 4 桁の自然数を  $n$  とおく。このとき自然数  $n$  は

$$\begin{aligned} n &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 1001a + 99b + 11c + b + d - a - c \\ &= 11(91a + 9b + c) + (b + d) - (a + c) \end{aligned}$$

と変形できるため、 $(b+d)-(a+c)$  が 11 の倍数もしくは 0 ならば  $n$  が 11 の倍数となることがわかる。このように、ある数の各位を一つ飛ばしに足した和同士の差が 11 の倍数もしくは 0 となるとき、その数は 11 の倍数となる。これをもとに  $(2, 3, 3, 4), (2, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 4)$  の各組み合わせについて 11 の倍数となる並べ方を考える。

[1]  $(2, 3, 3, 4)$  について

ある数の各位を一つ飛ばしに足した和同士の差が 11 の倍数もしくは 0 となるような並べ方は 2343, 3234, 3432, 4323 の 4 通りに限られる。よって、 $(2, 3, 3, 4)$  について 11 の倍数となる並べ方は 4 通りである。

[2]  $(2, 3, 4, 4)$  について

ある数の各位を一つ飛ばしに足した和同士の差が 11 の倍数もしくは 0 となるような並べ方はない。よって、 $(2, 3, 4, 4)$  について 11 の倍数となる並べ方はない。

[3]  $(3, 3, 4, 4)$  について

ある数の各位を一つ飛ばしに足した和同士の差が 11 の倍数もしくは 0 となるような並べ方は 3344, 3443, 4334, 4433 の 4 通りある。よって  $(3, 3, 4, 4)$  について 11 の倍数となる並べ方は 4 通りある。

以上 [1], [2], [3] より、11 の倍数の総数は  $4+0+4=8$  個である。

(2)

与式  $\int_2^x f(t)dt = g(x)$  の両辺に  $x=2$  を代入すると  $\int_2^2 f(t)dt = 0$  より、

$$\begin{aligned} 0 &= g(2) \\ \Leftrightarrow -3a \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6a + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1 \end{aligned}$$

と  $a$  が求まる。また、与式の両辺を  $x$  で微分すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= g'(x) \\ &= -6ax - 5 \end{aligned}$$

と  $f(x)$  を  $a$  を用いて表せる。これより  $f(x), g(x)$  がともに  $a$  を用いて表せたので、

$f(x), g(x)$  に  $a=-1$  を代入するとそれぞれ

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x - 5 \\ g(x) &= 3x^2 - 5x - 2 \end{aligned}$$

となる。以上より、 $f(x)=6x-5, g(x)=3x^2-5x-2$  とわかるから、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_{-1}^2 (3x^2 + x - 7) dx \\ &= \left[ x^3 + \frac{x^2}{2} - 7x \right]_{-1}^2 \\ &= -4 - \left( \frac{13}{2} \right) \\ &= -\frac{21}{2} \end{aligned}$$

と計算できる。