

1

[解答]

(1)	ア	イ	ウ	エ
	1	4	1	8
(2)	オ	カ	キ	ク
	81	39	9	−13
(3)	ケ			
	49			

[解説]

(1)

(i)

$9 \leq m+n \leq 11$ が成り立つ m, n の組は

$$(m, n) = (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$$

の 9 通りである。よって求める確率は、

$$\frac{9}{6^2} = \frac{1}{4}$$

と求められる。

(ii)

m が $1 \leq m \leq 4$ をみたす確率は $\frac{2}{3}$ である。また、 $1 \leq m \leq 4$ かつ $9 \leq m+n \leq 11$ が成り立つ

ような m, n の組は $(m, n) = (3, 6), (4, 5), (4, 6)$ の 3 通りである。よって求める条件つき確率は、

$$\frac{\frac{3}{\frac{6^2}{2}}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{8}$$

と求められる。

(2)

$t = \log_3 x$ とおくと、 $\frac{\sqrt{3}}{9} \leq x \leq 81$ より $-\frac{3}{2} \leq t \leq 4$ が成り立つ。このとき $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 16(\log_9 x)^3 - 48(\log_{81} x)^2 - 24\log_9 \frac{x}{729} - 65 \\ &= 16\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 9}\right)^3 - 48\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 81}\right)^2 - 24\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 9} - \log_9 729\right) - 65 \\ &= 2t^3 - 3t^2 - 12t + 7 \end{aligned}$$

と t を用いて表せる。右辺を $g(t)$ とおき、これを t で微分すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 6t^2 - 6t - 12 \\ &= 6(t+1)(t-2) \end{aligned}$$

となる。よって $-\frac{3}{2} \leq t \leq 4$ の範囲で $g(t)$ の増減表は以下の通りとなる。

t	$-\frac{3}{2}$	...	−1	...	2	...	4
$g'(t)$		+	0	−	0	+	
$g(t)$		↗	極大	↘	極小	↗	

ここで、

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{23}{2} \\ g(-1) &= 14 \\ g(2) &= -13 \\ g(4) &= 39 \end{aligned}$$

と計算できるから、増減表より $f(x)$ は $t=4$ 、すなわち $x=81$ のとき最大値 39 をとり、 $t=2$ 、すなわち $x=9$ のとき最小値 −13 をとる。

(3)

整式 $P(x)$ について

$$P(x^2) = (x^2 + 1)P(x) - x^2 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。整式 $P(x)$ の次数を n として、 n の値により場合分けして考える。

[1] $n \geq 1$ のとき

①の左辺は $2n$ 次、右辺は $n+2$ 次となるから、

$$\begin{aligned} 2n &= n+2 \\ \Leftrightarrow n &= 2 \end{aligned}$$

と n が求められ、 $P(x)$ は 2 次式であるとわかる。よって $P(x)$ は実数 a, b, c を用いて

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

と表せる。ただし $a \neq 0$ である。これを①に代入して計算すると、

$$\begin{aligned} P(x^2) &= (x^2 + 1)P(x) - x^2 \\ \Leftrightarrow ax^4 + bx^2 + c &= (x^2 + 1)(ax^2 + bx + c) - x^2 \\ \Leftrightarrow ax^4 + bx^2 + c &= ax^4 + bx^3 + (a+c-1)x^2 + bx + c \end{aligned}$$

となる。両辺が x に関する恒等式であることに注意して係数比較することで、

$$\begin{cases} b=0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ a+c-1=b & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。また $P(2)=7$ より

$$4a+2b+c=7 \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。②、③、④を連立して解くと、 $(a, b, c) = (2, 0, -1)$ であるから、

$$P(x) = 2x^2 - 1$$

となり、

$$\begin{aligned} P(5) &= 2 \cdot 5^2 - 1 \\ &= 49 \end{aligned}$$

と計算できる。

[2] $n=0$ のとき

$P(x)$ は定数であるから、 k を実数として $P(x)=k$ とおくと、①より

$$\begin{aligned} k &= (x^2 + 1) \cdot k - x^2 \\ \Leftrightarrow (k-1)x^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。これが任意の実数 x について成り立つとき $k=1$ であるため、

$$P(x) = 1$$

となるが、これは $P(2)=7$ に矛盾する。

以上[1], [2]より、

$$P(5) = 49$$

である。

2

[解答]

(1)	□	□		
	4	3		
(2)	□	□	□	□
	-5	2	9	10
(3)	□	□	□	
	2	3	2	

[解説]

(1)

$p=0$ より $\angle AOP=\frac{\pi}{2}$ であり、 $AO=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 、 $OP=2$ より

$$\begin{aligned}\tan \angle APO &= \frac{AO}{OP} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。よって $\angle APO=\frac{\pi}{6}$ とわかるから、 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$ となる。 $\angle APB$ は弧 C' に対する円周角

だから、 C' に対する中心角は $2\cdot\angle APB=\frac{2}{3}\pi$ である。したがって C' の長さは、

$$2\pi\cdot2\cdot\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}=\frac{4}{3}\pi$$

と求められる。

(2)

P は円 $C:x^2+y^2=4$ 上の点より、第1象限と第2象限において $q=\sqrt{4-p^2}$ と表せる。このと

き点 $P(p,\sqrt{4-p^2})$ と点 $A(-1,0)$ を通る直線の方程式は、点 P が第1象限にあることに注意し

$$y-0=\frac{0-\sqrt{4-p^2}}{-1-p}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{4-p^2}}{1+p}(x+1)$$

と求められる。ここで円 C と直線 PA の交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned}x^2+\left(\frac{\sqrt{4-p^2}}{1+p}(x+1)\right)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (2p+5)x^2+(8-2p^2)x-5p^2-8p &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-p)\{(2p+5)x+5p+8\} \\ \therefore x=p, \frac{-5p-8}{2p+5}\end{aligned}$$

と求められる。 $x=p$ は点 A に対応しているから、

$$\begin{aligned}r &= \frac{-5p-8}{2p+5} \\ &= \frac{-\frac{5}{2}(2p+5)+\frac{9}{2}}{2p+5} \\ &= -\frac{5}{2}+\frac{9}{4p+10}\end{aligned}$$

と r を p で表せる。

(3)

C' の長さは 2α より、 C' に対する中心角を θ とおくと、

$$\begin{aligned}2\cdot\pi\cdot2\cdot\frac{\theta}{2\pi} &= 2\alpha \\ \Leftrightarrow \theta &= \alpha\end{aligned}$$

となる。よって C' に対する円周角は $\angle APB=\frac{\alpha}{2}$ となる。いま各点の座標は $P(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 、

$A(-1,0)$ 、 $B(1,0)$ であるから、

$$\begin{aligned}PA &= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{5+2\sqrt{2}} \\ PB &= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{5-2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となる。 $\triangle APB$ について余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle APB &= \frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2\cdot AP\cdot BP} \\ &= \frac{5+2\sqrt{2}+5-2\sqrt{2}-4}{2\sqrt{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}} \\ &= \frac{3\sqrt{17}}{17}\end{aligned}$$

とわかる。したがって $\tan\frac{\alpha}{2}=\tan\angle APB$ は

$$\begin{aligned}1+\tan^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \\ \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\angle APB}-1}\left(\because \tan\frac{\alpha}{2}>0\right) \\ \therefore \tan\frac{\alpha}{2} &= \frac{2}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求められる。

3

[解答]

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
(1)	-5	-1	-3	-1	1	1
	ク	ケ	コ	サ	セ	
	4	-1	1	1	1	
(2)	ホ	ヘ				
	41	12				

[解説]

(1)

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 3 & (x < -\frac{1}{2}) \\ 2x^2 + 3x + 3 & (x \geq -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + (4-k)x + 2-k & (x < 0) \\ 2x^2 + (4+k)x + 2-k & (x \geq 0) \end{cases}$$

であるため、 $x < -\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ 、 $x \geq 0$ の各区間で場合分けして考える。

[1] $x < -\frac{1}{2}$ のとき

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 3 = 2x^2 + (4-k)x + 2-k$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (3-k)x - 1 - k = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\{4x-k-1\} = 0$$

より、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは $x = -1$ ($< -\frac{1}{2}$) で交わる。また、 $x = \frac{k+1}{4}$ が $x < -\frac{1}{2}$

を満たすとき、2つのグラフは $x = \frac{k+1}{4}$ で交わる。よってこの範囲において $k < -3$ かつ

$k \neq -5$ のとき共有点は2個、 $k \geq -3$ または $k = -5$ のとき共有点は1個となる。

[2] $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ のとき

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 3 = 2x^2 + (4-k)x + 2-k$$

$$\Leftrightarrow (1-k)x - 1 - k = 0$$

より、 $k = 1$ のとき $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは交点を持たない。 $k \neq 1$ のとき、

$x = \frac{1+k}{1-k}$ が $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ を満たすときに2つのグラフは $x = \frac{1+k}{1-k}$ で交わる。よってこの範

囲において $-\frac{1}{2} \leq \frac{1+k}{1-k} < 0$ 、つまり $-3 \leq k < -1$ のとき共有点は1個、 $k < -3$ または $k \geq$

-1 のとき共有点は0個となる。

[3] $x \geq 0$ のとき

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 3 = 2x^2 + (4+k)x + 2-k$$

$$\Leftrightarrow (1+k)x - 1 - k = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+k)(x-1) = 0$$

より、 $k = -1$ のとき $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは重なる。また、 $k \neq -1$ のとき $y = f(x)$

と $y = g(x)$ のグラフは $x = 1$ (≥ 0) で交わる。よってこの範囲において $k \neq -1$ のとき共有

点は1個、 $k = -1$ のとき共有点は無数に存在する。

以上[1], [2], [3]より、($k < -3$ かつ $k \neq -5$) かつ ($k < -3$ または $k \geq -1$) かつ ($k \neq -1$)、つまり

$k < -5$ または $-5 < k < -3$ のとき $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは異なる3つの交点をもち、そ

の x 座標は $-1, 1, \frac{1+k}{4}$ となる。また、($k \geq -3$ または $k = -5$) かつ ($-3 \leq k < -1$) かつ ($k \neq -1$)、つ

まり $-3 \leq k < -1$ のとき $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは異なる3つの交点をもち、その x 座標

は $-1, 1, \frac{1+k}{1-k}$ となる。さらに、($k \geq -3$ または $k = -5$) かつ ($k < -3$ または $k \geq -1$) かつ ($k \neq -1$)、

つまり $k = -5$ または $k > -1$ のとき $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは異なる2つの交点をもつ。

得られた結果をまとめると、異なる3つの交点をもつのは $k < -5$ または $-5 < k < -1$ のときで

あり、 $k < -5$ または $-5 < k \leq -3$ のとき交点の x 座標は $-1, 1, \frac{1+k}{4}$ 、 $-3 < k < -1$ のとき交点の

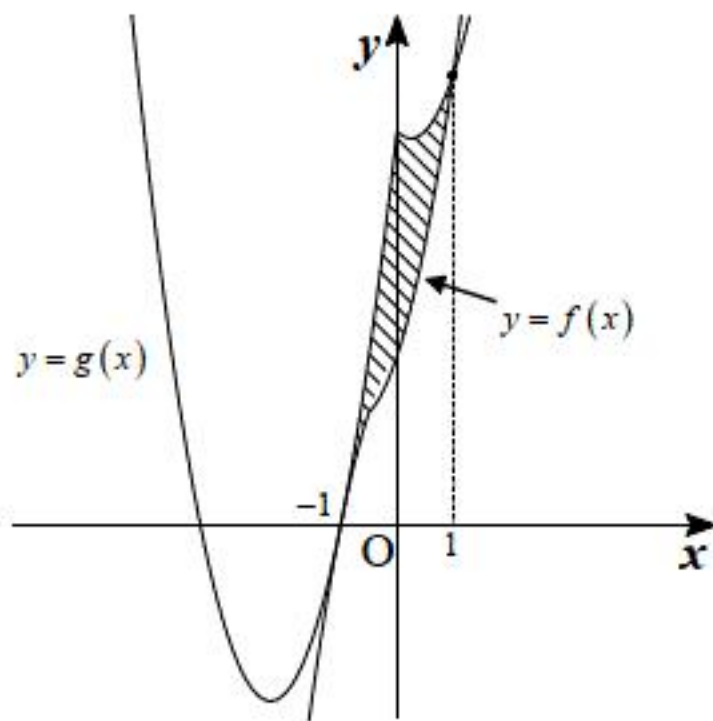
x 座標は $-1, 1, \frac{1+k}{1-k}$ となる。また異なる2つの交点をもつのは $k = -5$ または $k > -1$ のときであ

る。

(2)

$k = -5$ のとき、(1)より $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは異なる2つの交点をもつ。したがって、

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ によって囲まれた図形は下図の斜線部の通りとなる。



よって求める面積を S とおくと、

$$S = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \{2x^2 + 9x + 7 - (-2x^2 + x + 3)\} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \{2x^2 + 9x + 7 - (2x^2 + 3x + 3)\} dx$$

$$+ \int_0^1 \{2x^2 - x + 7 - (2x^2 + 3x + 3)\} dx$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} 4(x+1)^2 dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (6x+4) dx + \int_0^1 (-4x+4) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3} (x+1)^3 \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[3x^2 + 4x \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[-2x^2 + 4x \right]_0^1$$

$$= \frac{41}{12}$$

と計算できる。