

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	1	6	2	3	4
(2)	カ	キ	ク	ケ	
	1	0	-1	1	
(3)	コ	サ	シ	ス	
	8	3	4	3	

〔解説〕

(1)

すべての選び方は

$${}_nC_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

である。選んだ3つの数字のうち、3つが隣り合うのは

$$n-2 \quad (\text{通り})$$

である。2つだけが隣り合うもののうち、1, 2が隣り合うのは

$$n-3 \quad (\text{通り})$$

であり、 $n-1, n$ が隣り合うのは

$$n-3 \quad (\text{通り})$$

である。また、それ以外のある2数が隣り合うのは

$$n-4 \quad (\text{通り})$$

であり、そのように隣り合う2数の選び方は $n-3$ 通りである。よって、3つの数字が互いに隣り合わないのは

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - (n-2) - 2(n-3) - (n-3)(n-4) \\ &= \frac{1}{6}(n^2 - n - 6)(n-2) - (2+n-4)(n-3) \\ &= \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n+2) - (n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4) \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

である。

(2)

 x の整式 $P=x^3-x^2+1$ を $Q=x^2-x+1$ で割った余りを R とするとき

$$\begin{aligned} P &= x^3 - x^2 + 1 \\ &= (x^2 - x + 1)x + (-x + 1) \\ &= Qx + (-x + 1) \\ \therefore R &= -x + 1 \end{aligned}$$

となる。また、 Q を R で割った余りを S とするとき

$$\begin{aligned} Q &= x^2 - x + 1 \\ &= (-x + 1)(-x) + 1 \\ &= R(-x) + S \end{aligned}$$

となる。したがって、 S を P および Q で表わすと

$$\begin{aligned} S &= Q + Rx \\ &= Q + (P - Qx)x \\ &= xP + (-x^2 + 1)Q \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} w &= \frac{4z}{1-2z} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{w} &= \frac{1-2z}{4z} \quad (\because z \neq 0) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{w} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{4z} \\ \Leftrightarrow \frac{2+w}{w} &= \frac{1}{2z} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|z|=1$ より

$$\left| \frac{2+w}{w} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|w+2| = |w|$$

であり、両辺を2乗して変形すると

$$\begin{aligned} 4|w+2|^2 &= |w|^2 \\ \Leftrightarrow 4(w+2)(\overline{w}+2) &= w\overline{w} \\ \Leftrightarrow 3w\overline{w} + 8w + 8\overline{w} + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3w\left(\overline{w} + \frac{8}{3}\right) + 8\left(\overline{w} + \frac{8}{3}\right) &= \frac{16}{3} \\ \Leftrightarrow \left(w + \frac{8}{3}\right)\left(\overline{w} + \frac{8}{3}\right) &= \frac{16}{9} \\ \Leftrightarrow \left|w + \frac{8}{3}\right|^2 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ \therefore \left|w + \frac{8}{3}\right| &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

が得られる。

〔解答〕

(1)	セ	ソ	タ	チ	ツ
	1	2	1	2	1
(2)	テ	ト			
	1	6			
(3)	ナ	ニ	ヌ	ネ	
	1	5	12	25	

〔解説〕

(1)

点Hは平面OAC上にあるから、実数 a, c を用いて

$$\overrightarrow{OH} = a\overrightarrow{OA} + c\overrightarrow{OC}$$

とおける。ここで、 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BH}$ より、 a, c の値は

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot (a\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a|\overrightarrow{OA}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot (a\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow c|\overrightarrow{OC}|^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + a\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow c - \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore c = \frac{1}{2}$$

と求まる。したがって、 $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ であり

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BH}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(|\overrightarrow{OA}|^2 + 4|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \right) \\ &= 1 \\ \therefore |\overrightarrow{BH}| &= 1 \end{aligned}$$

が得られる。

(2)

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ より $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ であるから、 $\triangle OAC$ の面積は

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \sin \angle AOC = \frac{1}{2}$$

となる。よって、四面体OABCの体積は

$$\frac{1}{3} \triangle OAC \cdot BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

と求まる。

(3)

$0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

とおく。このとき、 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{BC}$ より

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{-s\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}\} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow -s|\overrightarrow{OA}|^2 + (1-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2s + t = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \{-s\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}\} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

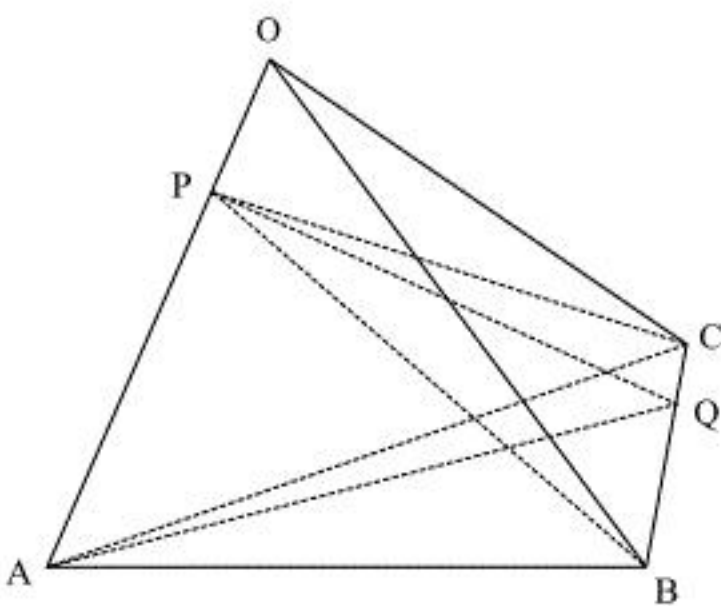
$$\Leftrightarrow s(-\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) + t(|\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2) + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - |\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s + 3t = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となるから、①、②を連立して解くと

$$(s, t) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

となり、これらは $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ を満たす。よって、 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$ であることがわかる。



四面体OABC, PABQの体積をそれぞれ V, V' とおく。また、四面体PABCの体積を V'' とおく。

まず、四面体PABQと四面体PABCについて、3点A, B, Cが成す平面を底面と考えることで

$$V' : V'' = \triangle ABQ : \triangle ABC = BQ : BC = t : 1 = 3 : 5 \quad \dots \textcircled{3}$$

であることがわかる。次に、四面体OABCと四面体PABCについて、3点O, A, Bが成す平面を底面と考えることで

$$V : V'' = \triangle OAB : \triangle PAB = OA : PA = 1 : 1 - s = 5 : 4 \quad \dots \textcircled{4}$$

であることがわかる。したがって、③、④より

$$V' = \frac{3}{5}V'' = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}V = \frac{12}{25}V$$

となるから、四面体PABQの体積は四面体OABCの体積の $\frac{12}{25}$ 倍であることがわかる。

【解答】

(1)	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	
	2	2	-1	4	
(2)	$\square$	$\square$			
	10	10			
(3)	(i)	$\square$	$\square$		
		24	11		
	(ii)	$\square$			
		6			

【解説】

関数 $f(x)$ を $f(x) = a \sin \left\{ \left(\frac{x}{2} + b \right) \pi \right\} + c$ と定めるとき

$$\begin{cases} f(-1) = a \sin \left(-\frac{\pi}{2} + b\pi \right) + c = -a \cos(b\pi) + c \\ f(0) = a \sin(0 + b\pi) + c = a \sin(b\pi) + c \\ f(1) = a \sin \left(\frac{\pi}{2} + b\pi \right) + c = a \cos(b\pi) + c \end{cases}$$

である。

(1)

$f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 1$ のとき、 $a > 0, -1 < b \leq 1$ に注意すると

$$\begin{cases} -a \cos(b\pi) + c = 0 \\ a \sin(b\pi) + c = 0 \\ a \cos(b\pi) + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cos(b\pi) = \frac{1}{2} \\ a \sin(b\pi) = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = -\frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$$

であることがわかる。

(2)

$f(-1) = 0, f(0) = -1, f(1) = 1$ のとき、 $a > 0, -1 < b \leq 1$ に注意すると

$$\begin{cases} -a \cos(b\pi) + c = 0 \\ a \sin(b\pi) + c = -1 \\ a \cos(b\pi) + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cos(b\pi) = \frac{1}{2} \\ a \sin(b\pi) = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{10}}{2}, \begin{cases} \cos(b\pi) = \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \sin(b\pi) = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases}, c = \frac{1}{2}$$

であることがわかる。

(3)(i)

$a > 0, -1 < b \leq 1$ を満たす実数 a, b, c の組に対して、 $f(-1), f(0), f(1)$ の組は1通りに定まる。
また、逆に、 $f(-1), f(0), f(1)$ のうち少なくとも1つが異なる実数であるとき

$$\begin{cases} f(-1) = -a \cos(b\pi) + c \\ f(0) = a \sin(b\pi) + c \\ f(1) = a \cos(b\pi) + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\left\{ f(1) - \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) \right\}^2 + \left\{ f(0) - \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) \right\}^2} (> 0) \\ \cos(b\pi) = \frac{f(1) - c}{a}, \sin(b\pi) = \frac{f(0) - c}{a} \\ c = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) \end{cases}$$

$$(\ast a = \sqrt{(f(1) - c)^2 + (f(0) - c)^2} \text{ より, } \left| \frac{f(1) - c}{a} \right| \leq 1 \text{ かつ } \left| \frac{f(0) - c}{a} \right| \leq 1 \text{ を満たす})$$

となるから、実数 $f(-1), f(0), f(1)$ の組に対して、 a, b, c の組は $a > 0, -1 < b \leq 1$ の範囲で1通りに定まる。さらに、 $f(-1), f(0), f(1)$ がすべて等しい実数であるとき、 $a = 0$ となり、 $a > 0, -1 < b \leq 1$ の範囲では対応する a, b, c の組は存在しない。よって、 $a > 0, -1 < b \leq 1$ の範囲では、 $f(-1), f(0), f(1)$ のうち少なくとも1つが異なる実数であるときに、実数 a, b, c の組と実数 $f(-1), f(0), f(1)$ の組は1対1対応する。

ここで、 $A \supset B$ となるとき、実数 $f(-1), f(0), f(1)$ はそれぞれ

$$f(-1) = -1, 0, 1, \quad f(0) = -1, 0, 1, \quad f(1) = -1, 0, 1$$

となりえて、これは $3^3 = 27$ 通りあるが、 $f(-1), f(0), f(1)$ がすべて等しい実数になるのは3通りであるから、 $A \supset B$ となる実数 $f(-1), f(0), f(1)$ の組は

$$27 - 3 = 24 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。したがって、対応する実数 a, b, c の組も24通りであることがわかる。

また、関数 $f(x) = a \sin \left\{ \left(\frac{x}{2} + b \right) \pi \right\} + c$ について、 $-1 < x < 1$ の範囲では

$$-\frac{\pi}{2} + b\pi < \left(\frac{x}{2} + b \right) \pi < \frac{\pi}{2} + b\pi$$

であるから、この範囲で最小値をとるための条件は、 $a > 0$ より

$$(2n-1)\pi < b\pi < 2n\pi$$

を満たす整数 n が存在することである。したがって、 $A \supset B$ を満たし、かつ

$$\begin{aligned} \sin(b\pi) &< 0 \\ \Leftrightarrow a \sin(b\pi) + c &< c \\ \Leftrightarrow f(0) &< \frac{f(1) + f(-1)}{2} \end{aligned}$$

を満たす実数 $f(-1), f(0), f(1)$ の組を求めればよく

$$f(0) = 1 \text{ のとき : 対応する } f(-1), f(1) \text{ は存在しない}$$

$$f(0) = 0 \text{ のとき : } (f(-1), f(1)) = (0, 1), (1, 0), (1, 1) \text{ の } 3 \text{ 通り}$$

$$f(0) = -1 \text{ のとき : } (f(-1), f(1)) = (-1, -1) \text{ を除く } 3^2 - 1 = 8 \text{ 通り}$$

より、全部で $0 + 3 + 8 = 11$ 通りであることがわかる。

(3)(ii)

$A = B$ となるのは、 $A \supset B$ を満たし、かつ実数 $f(-1), f(0), f(1)$ がすべて異なる実数である組となる場合である。そのような組は

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

であるから、求める a, b, c の組も6通りである。

【解答】

(1)		ㄹ	ㅁ	ㅇ					
		-1	2	-1					
(2)	(i)	ㅂ							
		(H)							
	(ii)	ㄷ	ㄱ	ㄴ	ㄷ	ㄹ	ㄷ	ㄱ	
		2	3	-3	2	3	2	3	
	(iii)	ㅂ	ㄷ						
		2	8						

【解説】

(1)

関数 $f(t) = \sqrt{1 + \cos t}$ は $0 \leq t \leq \pi$ において

$$f(t) = \sqrt{2 \cdot \frac{1 + \cos t}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2} \left| \cos \frac{t}{2} \right| = \sqrt{2} \cos \frac{t}{2}$$

と変形できるから、導関数 $f'(t)$ は

$$f'(t) = \left(\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} \right)' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{t}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left| \sin \frac{t}{2} \right| = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{1 - \cos t}$$

と計算できる。

(2)(i)

点 $P(x, y)$ についての媒介変数表示について

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

とおく。このとき、 $x(t + 2\pi) = x(t)$ 、 $y(t + 2\pi) = y(t)$ であり

$$\begin{aligned} x(2\pi - t) &= 2 \cos(2\pi - t) + \cos(2\pi - t) \\ &= 2 \cos t + \cos 2t \\ &= x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(2\pi - t) &= 2 \sin(2\pi - t) - \sin 2(2\pi - t) \\ &= -2 \sin t + \sin 2t \\ &= -y(t) \end{aligned}$$

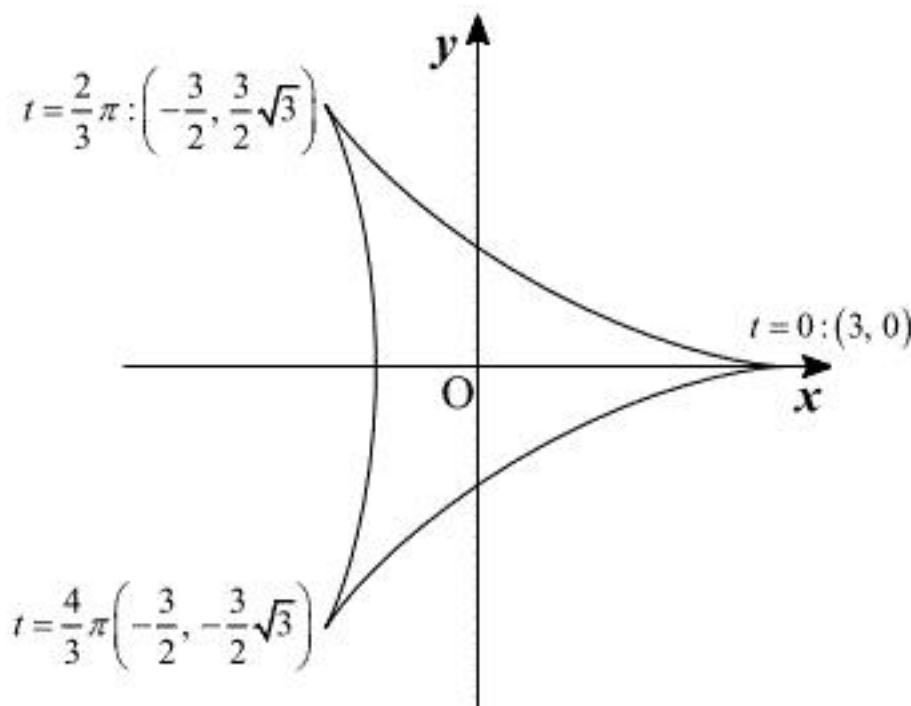
であることから、点 P が描く曲線は x 軸対称であることがわかり、 $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で点 $P(x, y)$ が描く曲線を調べればよいことがわかる。ここで、 $x(t)$ 、 $y(t)$ をそれぞれ t について微分して整理すると

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = -2 \sin t - 2 \sin 2t = -2(\sin t + \sin 2t) = -4 \sin \frac{3}{2}t \cos \frac{t}{2} \\ \frac{d}{dt} y(t) = 2 \cos t - 2 \cos 2t = 2(\cos t - \cos 2t) = 4 \sin \frac{3}{2}t \sin \frac{t}{2} \end{cases}$$

となるから、点 P の $0 \leq t \leq \pi$ の範囲における進行表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$\frac{dx}{dt}$	0	-	0	+	0
$\frac{dy}{dt}$	0	+	0	-	
(x, y)	(3, 0)	$\nwarrow$	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	(-1, 0)

この進行表より、 $t = \frac{2}{3}\pi$ において x 軸方向、 y 軸方向への増減が同時に変化することがわかるから、これを満たす曲線は選択肢の (H) である。



(2)(ii)

(i)における進行表より、 $0 < t < \frac{2}{3}\pi$ のとき、 x は単調に減少し y は単調に増加することがわかり、 $\frac{2}{3}\pi < t < \pi$ のとき、 x は単調に増加し y は単調に減少することがわかる。また、 $t = \frac{2}{3}\pi$ のとき、 P の座標は

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

である。

(2)(iii)

(i)における考察より、点 P が描く曲線で囲まれた部分は x 軸対称であるから

$$\begin{cases} y_1 = 2 \sin t - \sin 2t & (0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi) \\ y_2 = 2 \sin t - \sin 2t & (\frac{2}{3}\pi \leq t \leq \pi) \end{cases}$$

とすると、求める面積は

$$\begin{aligned} 2 \left(\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} y_1 dx - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} y_2 dx \right) &= 2 \left(\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (2 \sin t - \sin 2t) \cdot \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (2 \sin t - \sin 2t) \cdot \frac{dx}{dt} dt \right) \\ &= 2 \int_0^{\pi} (2 \sin t - \sin 2t) (2 \sin t + 2 \sin 2t) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (4 \sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t - 2 \sin^2 2t) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} \{ 2(1 - \cos 2t) + (\cos t - \cos 3t) - (1 - \cos 4t) \} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\cos 4t - \cos 3t - 2 \cos 2t + \cos t + 1) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{4} \sin 4t - \frac{1}{3} \sin 3t - \sin 2t + \sin t + t \right]_0^{\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(-2 \sin t - 2 \sin 2t)^2 + (2 \cos t - 2 \cos 2t)^2} \\ &= 2 \sqrt{\sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t - 2 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t} \\ &= 2 \sqrt{2 - 2(\cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t)} \\ &= 2 \sqrt{4 \cdot \frac{1 - \cos 3t}{2}} \\ &= 4 \sqrt{\sin^2 \frac{3}{2}t} \\ &= 4 \left| \sin \frac{3}{2}t \right| \end{aligned}$$

より、点 P が $t=0$ から $t=\pi$ までに動く道のりは

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^{\pi} 4 \left| \sin \frac{3}{2}t \right| dt \\ &= 4 \left(\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin \frac{3}{2}t dt - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin \frac{3}{2}t dt \right) \\ &= 4 \left(\left[-\frac{2}{3} \cos \frac{3}{2}t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} - \left[-\frac{2}{3} \cos \frac{3}{2}t \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \right) \\ &= 4 \left\{ \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) - \left(0 - \frac{2}{3} \right) \right\} \\ &= 8 \end{aligned}$$

と求まる。