

〔解答〕

あ	い	う	え						
(c)	(c)	(a)	(c)						
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
01	04	03	01	09	04	-01	07	09	03
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
10	07	23	10	21	11	23	30	48	

〔解説〕

 $3^4 = 81, 2^3 \cdot 10 = 80$ であるから

$$3^4 > 2^3 \cdot 10$$

となる。両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 3^4 > \log_{10} (2^3 \cdot 10)$$

$$\Leftrightarrow 4\log_{10} 3 > 3\log_{10} 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 4y > 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow y > \frac{1}{4}(3x + 1) \quad \cdots (A)$$

 となる。同様に $3^9 < 2 \cdot 10^4$ の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 3^9 < \log_{10} (2 \cdot 10^4)$$

$$\Leftrightarrow 9y < x + 4$$

$$\Leftrightarrow y < \frac{1}{9}(x + 4) \quad \cdots (B)$$

 がわかり、また $6^9 > 10^7$ の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 6^9 > \log_{10} 10^7$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} (2^9 \cdot 3^9) > 7$$

$$\Leftrightarrow 9x + 9y > 7$$

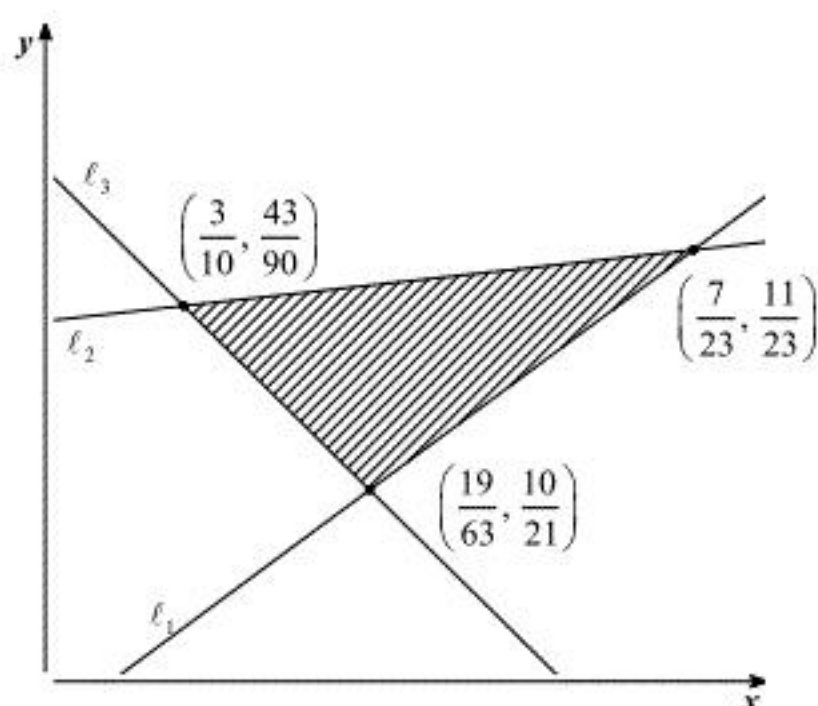
$$\Leftrightarrow y > -x + \frac{7}{9} \quad \cdots (C)$$

がわかる。ここで

$$\ell_1: y = \frac{1}{4}(3x + 1)$$

$$\ell_2: y = \frac{1}{9}(x + 4)$$

$$\ell_3: y = -x + \frac{7}{9}$$

 として、(A)(B)(C)を満たす (x, y) の領域を図示すると以下のようなになる。

 ℓ_1 と ℓ_2 , ℓ_2 と ℓ_3 , ℓ_3 と ℓ_1 の交点をそれぞれ求めると $\left(\frac{7}{23}, \frac{11}{23}\right), \left(\frac{3}{10}, \frac{43}{90}\right), \left(\frac{19}{63}, \frac{10}{21}\right)$ となり、

 これとグラフを合わせると、 x, y のとり得る値の範囲は

$$\frac{3}{10} < x < \frac{7}{23}, \frac{10}{21} < y < \frac{11}{23}$$

であることがわかる。また

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

$$\frac{7}{23} = 0.304\cdots$$

$$\frac{10}{21} = 0.476\cdots$$

$$\frac{11}{23} = 0.478\cdots$$

 であるから、 $\log_{10} 2$ の近似値は 0.30、 $\log_{10} 3$ の近似値は 0.48 である。

【解答】

(1)	ト	ナ		
	41	04		
(2)	ニ	ヌ	ネ	ノ
	28	41	01	01
(3)	ハ	ヒ	フ	ヘ
	16	41	28	41

【解説】

(1)

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$$

とすると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

であり、

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

である。また、点Pは辺EFを1:3に内分する点より

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{c}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{c}\right) - (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CP}|^2 &= \left|-\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right|^2 \\ &= \frac{9}{16}|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &= \frac{41}{16} \\ \therefore |\overrightarrow{CP}| &= \frac{\sqrt{41}}{4}\end{aligned}$$

である。

(2)

点Qは線分CPを $t:1-t$ に内分する点より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= (1-t)\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AP} \\ &= (1-t)(\vec{a} + \vec{b}) + t\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \vec{c}\right) \\ &= \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

と分かる。また、CPに垂直で点Qを通る平面を α とし、 α が直線AEと交わる点をRとすると、実数 r を用いて

$$\overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AE} = r\vec{c}$$

と表せる。Rは α 上の点より $\overrightarrow{RQ} \perp \overrightarrow{CP}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{CP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AR}) \cdot \overrightarrow{CP} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + (t-r)\vec{c} \right\} \cdot \left(-\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}t\right) - (1-t) + (t-r) &= 0 \\ \Leftrightarrow r = \frac{41}{16}t - \frac{7}{4}\end{aligned}$$

となる。Rが辺AE上にある条件は

$$0 \leq r \leq 1$$

より

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{41}{16}t - \frac{7}{4} \leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq \frac{41}{16}t \leq \frac{11}{4} \\ \therefore \frac{28}{41} \leq t \leq \frac{44}{41}\end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq t \leq 1$ より

$$\frac{28}{41} \leq t \leq 1$$

である。

(3)

(2)と同様に、 α が直線ABと交わる点をSとすると、実数 s を用いて

$$\overrightarrow{AS} = s\vec{a}$$

と表せる。Sは α 上の点より $\overrightarrow{SQ} \perp \overrightarrow{CP}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SQ} \cdot \overrightarrow{CP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AS}) \cdot \overrightarrow{CP} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(1 - \frac{3}{4}t - s\right)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c} \right\} \cdot \left(-\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}t - s\right) - (1-t) + t &= 0 \\ \Leftrightarrow s = -\frac{41}{12}t + \frac{7}{3}\end{aligned}$$

となる。Sが辺AB上にある条件は

$$0 \leq s \leq 1$$

より

$$\begin{aligned}0 \leq -\frac{41}{12}t + \frac{7}{3} \leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq \frac{41}{12}t \leq \frac{7}{3} \\ \therefore \frac{16}{41} \leq t \leq \frac{28}{41}\end{aligned}$$

である。これは $0 \leq t \leq 1$ を満たす。

【解答】

(1)	(i)	(c)			
	(ii)	(b)			
(2)	☐ ホ	☐ マ	☐ ミ	☐ ム	☐ メ
	-03	-01	02	03	-01
	☐ モ	☐ ヤ	☐ ユ	☐ ヨ	
	02	-01	04	03	

【解説】

(1)

(i)

命題(P)は

すべての $x \in X$ について「 x が 5 の倍数 $\Rightarrow x$ が奇数」

と表すことができる。ここで、括弧の中の条件の対偶をとると

すべての $x \in X$ について「 x が偶数 $\Rightarrow x$ が 5 の倍数でない」

となる。これらの命題の真偽は一致するから、命題(P)は命題(c)と同値であることがわかる。

また、それ以外の命題について

 $X = \{5\}$ とするとき、命題(P)は真だが、命題(a), (b), (d), (f), (g), (h)は偽である $X = \{1, 5\}$ とするとき、命題(P)は真だが、命題(e)は偽である

よって、これらは命題(P)と同値でない。したがって、求める答えは(c)のみである。

(ii)

命題(P)の否定を命題(Q)とすると、これは

ある $x \in X$ で「 x が 5 の倍数 かつ x が偶数」であるものが存在する

と表すことができる。ここで、括弧のなかの条件を言い換えると

ある $x \in X$ で「 x が 10 の倍数」であるものが存在する

となる。これらの命題の真偽は一致するから、命題(Q)と命題(b)は同値であることがわかる。

また、それ以外の命題について

 $X = \{10\}$ とするとき、命題(Q)は真だが、命題(c), (d), (f)は偽である $X = \{1, 10\}$ とするとき、命題(Q)は真だが、命題(e), (h)は偽である $X = \{5, 10\}$ とするとき、命題(Q)は真だが、命題(a), (g)は偽である

よって、これらは命題(P)と同値でない。したがって、求める答えは(b)のみである。

(2)

 $f(x)$ は 2 次関数であるから、 $a \neq 0$ である。ここで

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

に関して、 $f(1) = 1$ より

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= 1 - a - c \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。 $f(x)$ が開区間 $-1 < x < 1$ で最小値をとることから、2 次関数のグラフは下に凸であり、グラフの軸 $x = -\frac{b}{2a}$ は開区間 $-1 < x < 1$ に存在する。したがって、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a > 0 \\ -1 < -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a > 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ |b| < 2a & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases} \end{aligned}$$

となり、さらに $f(x)$ の $-1 < x < 1$ における最小値が -1 であることから

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow -\frac{b^2}{4a} + c &= -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。また、奇関数、偶関数に注意すると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) dx \\ &= 2 \int_0^1 (ax^2 + c) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} ax^3 + cx \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} a + 2c \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} a + 2c &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -3c \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

が成り立つ。①に⑤を代入すると

$$\begin{aligned} b &= 1 - (-3c) - c \\ &= 2c + 1 \end{aligned}$$

であり、これをさらに⑤とともに④に代入して

$$\begin{aligned} -\frac{(2c+1)^2}{-12c} + c &= -1 \\ \Leftrightarrow (2c+1)^2 + 12c^2 &= -12c \\ \Leftrightarrow 16c^2 + 16c + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

となる。このとき、求める a, b, c の値の候補は

$$(a, b, c) = \left(\frac{6-3\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{4} \right), \left(\frac{6+3\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-2-\sqrt{3}}{4} \right)$$

となる。

$$[1] \quad (a, b, c) = \left(\frac{6-3\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{4} \right) \text{ のとき}$$

 $2 > \sqrt{3}$ より $\frac{6-3\sqrt{3}}{4} > 0$ であるから、②を満たす。一方で、 $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$ より

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| - 2 \cdot \frac{6-3\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}-6}{2} > 0$$

であるから、③を満たさない。よって、これは不適である。

$$[2] \quad (a, b, c) = \left(\frac{6+3\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-2-\sqrt{3}}{4} \right) \text{ のとき}$$

 $\frac{6+3\sqrt{3}}{4} > 0$ であるから、②を満たす。また、

$$\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| - 2 \cdot \frac{6+3\sqrt{3}}{4} = \frac{-2\sqrt{3}-6}{2} < 0$$

であるから、③を満たす。よって、これは適する。

以上[1], [2]より、求める a, b, c の値は

$$(a, b, c) = \left(\frac{6+3\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-2-\sqrt{3}}{4} \right)$$

であることがわかる。