

(2016年度)

2 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ、4問である。)

受験についての注意

1. 試験監督者の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 試験開始前に、試験監督者から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号と一致することを確認し、所定の欄に氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
3. 試験監督者から試験開始の指示があったら、この問題冊子が、上に記したページ数どおりそろっていることを確かめること。
4. 筆記具は、HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能やスマートウォッチなどのウェアラブル端末を使用してはならない。
5. マーク式の解答は、解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。
6. マークをするとき、マーク欄からはみ出したり、白い部分を残したり、文字や番号、○や×をつけたりしてはならない。また、マーク箇所以外の部分には何も書いてはならない。
7. 問題①②の解答は、各解答欄に丁寧に記入すること。
足りない場合は、その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には何も書いてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. マーク式解答用紙の最下段の①②の欄には記入しないこと。
10. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはならない。
11. 試験監督者の許可なく試験時間中に退場してはならない。
12. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
13. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。
14. この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例〕 ア に7、イ に－26をマークする場合。

	符号	10 の 位											1 の 位										
ア	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
イ	－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

$-x^2 + x$ を、 $\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$ にあてはめる場合

$\boxed{-1}x^2 + \boxed{1}x + \boxed{0}$ とする。

1 (1) 自然数 n に対して

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^j}{j} = 0$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) 等式

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\log 2$$

が成り立つことを証明せよ。

2 有理数とは、整数 a と自然数 b を用いて $\frac{a}{b}$ と表される実数のことであり、無理数とは有理数でない実数のことである。座標平面上の点で x 座標も y 座標も整数である点を格子点といい、座標平面上の点で x 座標も y 座標も有理数である点を有理点という。

(1) 次の条件を満たす直線を下の選択肢からすべて選べ。

- (i) 格子点を 1 点だけ通る直線
- (ii) どの格子点も通らないが、有理点を 2 点以上通る直線
- (iii) どの格子点も通らないが、有理点を 1 点だけ通る直線
- (iv) どの有理点も通らない直線

選択肢：

- | | |
|--------------------------------|--|
| A. $2x + 3y = 0$ | B. $2x - 3y = 1$ |
| C. $4x + 6y = 3$ | D. $x + \sqrt{3}y = 3$ |
| E. $\sqrt{2}x + 3y = 2$ | F. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1$ |
| G. $\sqrt{2}x + 3y = \sqrt{2}$ | H. $2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{2}$ |

(2) 上の (iv) で選んだ直線がどの有理点も通らないことを証明せよ。ただし、(iv) で選んだ直線が複数ある場合は、そのうちの 1 つについて証明せよ。また、 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ が無理数であることは用いてよい。

- 3 座標平面上に、半径2の円板 D がある。はじめ、 D の中心は $(0, 2)$ にあり、そのとき D 上の定点 P は $(0, 1)$ にある。 D が x 軸に接しながら正の方向にすべることなく1回転するとき、 P が描く曲線を C とする。

- (1) D がはじめの位置から角度 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) だけ回転したとき、 P の座標は

$$\left(\boxed{\text{あ}} + \boxed{\text{ア}}\theta, \boxed{\text{い}} + \boxed{\text{イ}} \right)$$

である。ただし、 $\boxed{\text{あ}}$ 、 $\boxed{\text{い}}$ には、下の選択肢から当てはまるものを選べ。

選択肢：

- | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------------------|
| A. $\sin \theta$ | B. $\sin 2\theta$ | C. $\sin \frac{\theta}{2}$ |
| D. $-\sin \theta$ | E. $-\sin 2\theta$ | F. $-\sin \frac{\theta}{2}$ |
| G. $\cos \theta$ | H. $\cos 2\theta$ | I. $\cos \frac{\theta}{2}$ |
| J. $-\cos \theta$ | K. $-\cos 2\theta$ | L. $-\cos \frac{\theta}{2}$ |

- (2) 曲線 C と直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ウ}} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$

である。

- (3) D がはじめの位置から角度 θ だけ回転したときの P における

$$C \text{ の接線の傾きは, } \theta = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi \text{ のとき最大値 } \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}} \text{ を}$$

とる。

- 4 (1) 自然数 n に対して、複素数 $z_n = \cos \frac{\pi}{3^n} + i \sin \frac{\pi}{3^n}$ を考える。

$$\frac{z_2 z_4 \cdots z_{2n}}{z_1 z_3 \cdots z_{2n-1}} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (-\pi < \alpha \leq \pi)$$

であるとき、

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \left(1 - 3^{\boxed{\text{ス}}^n} \right) \pi$$

である。

- (2) 集合 $\{4^k \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に属する異なる 2 個以上の整数の和として表される整数全体の集合を S とする。このとき、 S の要素の中で 8 の倍数は全部で $\boxed{\text{セ}}$ 個ある。また、 S のすべての要素の和を 8 で割ったときの余りは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

- (3) 1 辺の長さが 1 の立方体 OAPB-CQSR において、辺 AQ を $t : (1-t)$ に内分する点 T をとる。ただし、 $0 < t < 1$ とする。T を通り直線 OS と垂直な平面でこの立方体を切ったときの断面を D とし、 D と直線 OS の交点を H とする。このとき

$$TH^2 = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \left(t^2 + \boxed{\text{ツ}} t + \boxed{\text{テ}} \right)$$

である。また、 D の周上の点と H の距離の最小値は、 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}} \left(t + \boxed{\text{ニ}} \right)$$

である。



