1

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	0	1	27	3
(2)	オ			
	9			
(3)	カ	キ	ク	
	d	c	b	

〔解説〕

(1)

不等式 $x^{\log_3 x^3} \geqq \left(\dfrac{27}{x^2}\right)^3$ において，真数条件より，

$$x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

である。よって，不等式 $x^{\log_3 x^3} \geqq \left(\dfrac{27}{x^2}\right)^3$ の両辺は正であるから，両辺に底を3とする対数をとって，

$$\log_3 x^{\log_3 x^3} \geqq \log_3 \left(\frac{27}{x^2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 3(\log_3 x)^2 \geqq 3(3-2\log_3 x)$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x - 1)(\log_3 x + 3) \geqq 0$$
$$\Leftrightarrow \log_3 x \leqq -3,\ 1 \leqq \log_3 x$$

$$\therefore 0 < x \leqq \frac{1}{27},\ 3 \leqq x$$

を得る。

(2)

$f(x) = 0$ となるのは，x の値が

$$x^2 + 3x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -3,\ 0$$

となるときであるから，$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$ とおくと，$a < -3,\ 0 < b$ を満たす実数 a, b に対して，$\int_a^b |f(x)|dx - \int_a^b f(x)dx$ の値は

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|dx - \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{-3} f(x)dx + \int_{-3}^0 \{-f(x)\}dx + \int_0^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \\ &= F(-3) - F(a) + F(-3) - F(0) + F(b) - F(0) - F(b) + F(a) \\ &= 2\{F(-3) - F(0)\} \\ &= 2\left(-9 + \frac{27}{2}\right) \\ &= 9\end{aligned}$$

となる。

(3)

(i)

$x + y > 0$ は $xy > 0$ であるための，必要条件でも十分条件でもない。なぜなら，
$x + y > 0 \Rightarrow xy > 0$ の反例として $x = 2,\ y = -1$ が，$xy > 0 \Rightarrow x + y > 0$ の反例として $x = -1,\ y = -1$ が挙げられるからである。

(ii)

$x^2 + y^2 > 2xy$ を同値変形すると，

$$x^2 + y^2 > 2xy$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq y$$

となる。よって，$x^2 + y^2 > 2xy$ は，$x \neq y$ であるための必要十分条件である。

(iii)

与えられた $f(x)$ について，各範囲について導関数を求めるとそれぞれ，

$x \leqq -1$ のとき，$f'(x) = -3x^2 - 4x + 7 = -(3x+7)(x-1)$
$-1 < x \leqq 2$ のとき，$f'(x) = 3x^2 + 4x - 7 = (3x+7)(x-1)$
$2 < x \leqq 4,\ 8 < x$ のとき，$f'(x) = x - 6$
$4 < x \leqq 8$ のとき，$f'(x) = 6 - x$

であるから，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{7}{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗

上表より，$f(x)$ が最小値をとる可能性があるのは，$x = -\dfrac{7}{3},\ 1,\ 4,\ 8$ のときであり，

$$f(1) = f(4) = f(8) = -8$$

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{7}{3}\right) &= \frac{343}{27} - \frac{98}{9} - \frac{49}{3} + 12 \\ &= -\frac{68}{27} > -8\end{aligned}$$

であるから，$f(x)$ は $x = 1,\ 4,\ 8$ で最小値をとる。よって，

$$x = 4,\ 8 \Rightarrow f(x) \text{ が最小値をとる}$$

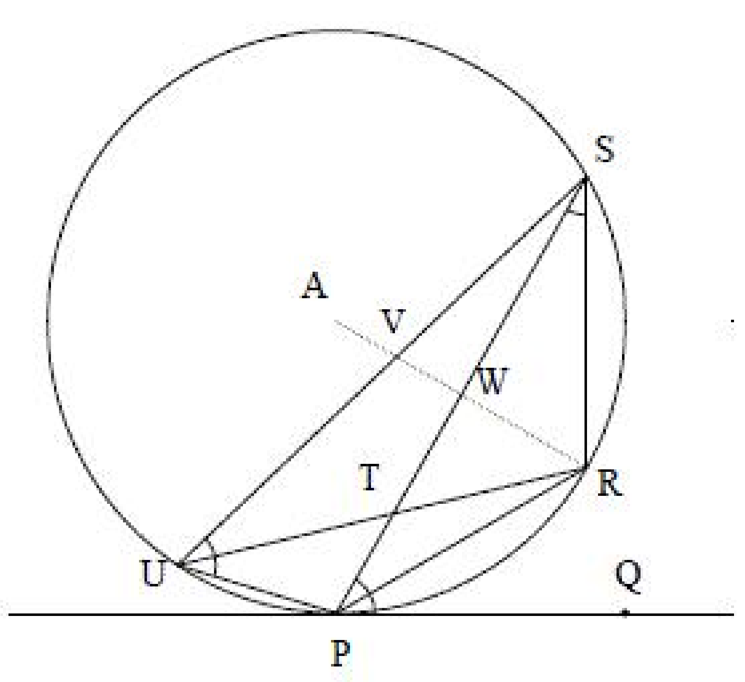
が成り立ち，逆は成り立たないため，$x = 4,\ 8$ は $f(x)$ が最小値をとるための十分条件であるが必要条件でない。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	ケ	コ	サ	シ				
	3	4	3	2				
(2)	ス	セ	ソ	タ	チ			
	1	3	2	2	2			
(3)	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
	3	4	3	5	2	2	5	2

〔解説〕



与えられた条件より，

$0<\theta<\pi$ ・・・①

$\mathrm{PR}=1$ ・・・②

$\mathrm{PS}=2\cos 2\theta+3\cos\theta-1$

$=4\cos^2\theta+3\cos\theta-3$ ・・・③

である。

(1)

円周角の定理より，

$\angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{PSR}$

$\therefore \angle\mathrm{PSR}=\theta$

であるから，$\triangle\mathrm{RPS}$ は $\mathrm{RP}=\mathrm{RS}$ の二等辺三角形である。したがって②より

$\mathrm{RS}=1$ ・・・④

が成立する。また，①，③より

$4\cos^2\theta+3\cos\theta-3>0,\ -1<\cos\theta<1$

であるから，これを解いて

$\dfrac{\sqrt{57}-3}{8}<\cos\theta<1$ ・・・⑤

を得る。よって，$\triangle\mathrm{RPS}$ について，余弦定理と②，④，⑤より

$\mathrm{PS}^2=\mathrm{RP}^2+\mathrm{RS}^2-2\cdot\mathrm{RP}\cdot\mathrm{RS}\cos(\pi-2\theta)$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^2\theta+3\cos\theta-3\right)^2=(2\cos\theta)^2$

$\therefore 4\cos^2\theta+3\cos\theta-3=2\cos\theta$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\theta+\cos\theta-3=0$

$\Leftrightarrow (\cos\theta+1)(4\cos\theta-3)=0$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{3}{4}$

が成立する。これを③へ代入すると

$\mathrm{PS}=4\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+3\left(\dfrac{3}{4}\right)-3$

$=\dfrac{3}{2}$

を得る。

(2)

$\mathrm{RT}=\mathrm{TU}$ に注意すると，方べきの定理と(1)の結果より

$\mathrm{RT}\cdot\mathrm{TU}=\mathrm{PT}\cdot\mathrm{TS}$

$\therefore \mathrm{RT}^2=a(1-a)\mathrm{PS}^2$

$=-\dfrac{9}{4}a^2+\dfrac{9}{4}a$ ・・・⑥

である。更に $\triangle\mathrm{RTP}$ について，余弦定理より

$\mathrm{RT}^2=\mathrm{PT}^2+\mathrm{PR}^2-2\cdot\mathrm{PT}\cdot\mathrm{PR}\cos\angle\mathrm{RPS}$

$=\dfrac{9}{4}a^2-\dfrac{9}{4}a+1$ ・・・⑦

が成り立つ。⑥，⑦より

$-\dfrac{9}{4}a^2+\dfrac{9}{4}a=\dfrac{9}{4}a^2-\dfrac{9}{4}a+1$

$\Leftrightarrow 9a^2-9a+2=0$

$\Leftrightarrow (3a-1)(3a-2)=0$

である。$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ に注意してこれを解くと，$a=\dfrac{1}{3}$ とわかる。更にこれを⑥に代入し

$\mathrm{RT}=\sqrt{-\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{1}{9}+\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{1}{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

を得る。また，$\triangle\mathrm{RTP}$ と $\triangle\mathrm{STU}$ について，円周角の定理より

$\angle\mathrm{TRP}=\angle\mathrm{PSU},\ \angle\mathrm{RPT}=\angle\mathrm{RUS}$

が成り立つため，$\triangle\mathrm{RTP}\backsim\triangle\mathrm{STU}$ と言える。よって，

$\mathrm{SU}:\mathrm{PR}=\mathrm{TU}:\mathrm{TP}$

$\Leftrightarrow \mathrm{SU}:1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}:\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{SU}=\sqrt{2}$

である。

(3)

$\triangle\mathrm{RPS}$ は $\mathrm{RP}=\mathrm{RS}$ の二等辺三角形であるから，

$\mathrm{SW}=\dfrac{1}{2}\mathrm{SP}$

$=\dfrac{3}{4}$

であり，

$\overrightarrow{\mathrm{RW}}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{RP}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right)$ ・・・⑧

とわかる。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{RV}}$ について，実数 t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{RV}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{RU}}+t\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

$=(1-t)\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{RT}}+t\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

$=\dfrac{4}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{RP}}+\dfrac{1}{3}(t+2)\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ ・・・⑨

と表せる。$\overrightarrow{\mathrm{RP}},\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ は一次独立であり，かつ3点 R, W, V は一直線上にあることから

$\overrightarrow{\mathrm{RV}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{RW}}$

とおける。よって⑧，⑨より

$\dfrac{4}{3}(1-t)=\dfrac{1}{3}(t+2)$

$\therefore t=\dfrac{2}{5}$

である。故に

$\mathrm{SV}=\dfrac{3}{5}\mathrm{SU}$

$=\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$

$\mathrm{UV}=\dfrac{2}{5}\mathrm{SU}$

$=\dfrac{2}{5}\sqrt{2}$

である。

3

〔解答〕

(1)	ハ	ヒ										
	01	09										
(2)	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ
	04	07	03	07	13	20	10	07	−03	07	13	20
(3)	リ											
	05											

〔解説〕

(1)

条件より，

$$\begin{cases} a_1=b_1=1 \\ a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{1}{10}b_n & \cdots① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{9}{10}b_n & \cdots② \end{cases}$$

となるから，

$$\begin{aligned} a_2&=\frac{3}{4}a_1+\frac{1}{10}b_1 \\ &=\frac{3}{4}\cdot1+\frac{1}{10}\cdot1 \\ &=\frac{17}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2&=\frac{1}{4}a_1+\frac{9}{10}b_1 \\ &=\frac{1}{4}\cdot1+\frac{9}{10}\cdot1 \\ &=\frac{23}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3&=\frac{3}{4}a_2+\frac{1}{10}b_2 \\ &=\frac{3}{4}\cdot\frac{17}{20}+\frac{1}{10}\cdot\frac{23}{20} \\ &=\frac{301}{400} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3&=\frac{1}{4}a_2+\frac{9}{10}b_2 \\ &=\frac{1}{4}\cdot\frac{17}{20}+\frac{9}{10}\cdot\frac{23}{20} \\ &=\frac{499}{400} \end{aligned}$$

である。したがって，a_3 と b_3 をそれぞれ既約分数で表したとき，分子の一の位の数字は，a_3 については1，b_3 については9 である。

(2)

①＋②より，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$$

であるから，

$$\begin{aligned} &a_n+b_n=a_1+b_1=2 \\ \Leftrightarrow\ &b_n=2-a_n \end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると，

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{10}(2-a_n) \\ &=\frac{13}{20}a_n+\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{13}{20}\left(a_n-\frac{4}{7}\right)$$

となるから，数列 $\left\{a_n-\dfrac{4}{7}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{7}{4}=\dfrac{3}{7}$，公比 $\dfrac{13}{20}$ の等比数列で，

$$\begin{aligned} &a_n-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} \\ &\therefore a_n=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。また，

$$\begin{aligned} b_n&=2-a_n \\ &=\frac{10}{7}-\frac{3}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。

(3)

$2a_n \leqq b_n$ とすると，

$$\begin{aligned} &2a_n\leqq b_n \\ \Leftrightarrow\ &\frac{8}{7}+\frac{6}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}\leqq\frac{10}{7}-\frac{3}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{9}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}\leqq\frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}\leqq\frac{2}{9} \\ \Leftrightarrow\ &\log_{10}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}\leqq\log_{10}\frac{2}{9} \\ \Leftrightarrow\ &(n-1)\log_{10}\frac{1.3}{2}\leqq\log_{10}2-2\log_{10}3 \\ \Leftrightarrow\ &(n-1)(\log_{10}1.3-\log_{10}2)\leqq\log_{10}2-2\log_{10}3 \\ \Leftrightarrow\ &(n-1)\cdot0.1871\geqq0.6532 \\ \Leftrightarrow\ &n-1\geqq3.49\cdots \\ \Leftrightarrow\ &n\geqq4.49\cdots \end{aligned}$$

となる。したがって，$2a_n \leqq b_n$ となる最小の n は

$$n=5$$

である。