1

(1)

$\triangle AA'C$ において三平方の定理より，$A'C=\sqrt{a^2+1}$ となる。同様に $\triangle BB'C$ において三平方の定理より，$B'C=\sqrt{b^2+2}$ となる。また，点 B' から線分 AP に下ろした垂線の足を D とすると，$\triangle A'B'D$ において三平方の定理より，$A'B'=\sqrt{(a-b)^2+1}$ となる。

(答) $A'C=\sqrt{a^2+1},\ A'B'=\sqrt{(a-b)^2+1},\ B'C=\sqrt{b^2+2}$

(2)

$\angle A'B'C$ が直角であるとき，$\triangle A'B'C$ において三平方の定理より $A'C^2=A'B'^2+B'C^2$ が成り立つ。よって，

$$A'C^2=A'B'^2+B'C^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+1=(a-b)^2+1+b^2+2$$
$$\Leftrightarrow b^2-ab+1=0$$

と a と b が満たすべき関係式が求められる。

(答) $b^2-ab+1=0$

(3)

(2)より，$\angle A'B'C$ が直角であるとき $b\neq 0$ で，$b^2-ab+1=0\Leftrightarrow a=\dfrac{b^2+1}{b}$ が成り立つ。条件より a は $0\leqq a\leqq 3$ を満たす。$0<b\leqq 3$ より明らかに $a>0$ である。よって，

$$a\leqq 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{b^2+1}{b}\leqq 3$$
$$\Leftrightarrow b^2-3b+1\leqq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq b\leqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

と b のとり得る値が求められる。これは $0<b\leqq 3$ を満たす。

(答) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq b\leqq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(4)

$a=b+\dfrac{1}{b}$ より，求める面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\cdot A'B'\cdot B'C$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(a-b)^2+1}\cdot\sqrt{b^2+2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+3+\frac{2}{b^2}}$$

と b を用いて表せる。ここで，$f(b)=b^2+3+\dfrac{2}{b^2}$ とおくと，S の最大，最小は $f(b)$ の最大，最小と一致する。また，$f(b)=\left(b+\dfrac{\sqrt{2}}{b}\right)^2+3-2\sqrt{2}$ と変形できるため，$g(b)=b+\dfrac{\sqrt{2}}{b}$ とおくと，$f(b)$ の最大，最小は $g(b)$ の最大，最小と一致する。$g(b)$ を b で微分すると，

$$g'(b)=\frac{b^2-\sqrt{2}}{b^2}$$
$$=\frac{(b+\sqrt[4]{2})(b-\sqrt[4]{2})}{b^2}$$

と因数分解できる。よって $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq b\leqq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ における $g(b)$ の増減表は以下の通りとなる。

b	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt[4]{2}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$g'(b)$		$-$	0	$+$	
$g(b)$		↘	極小	↗	

ここで，$g\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{3(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{2}$，$g(\sqrt[4]{2})=2\cdot\sqrt[4]{2}$，

$g\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{3(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{2}$ と計算できるから，$g\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)<g\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ かつ増減表より，$g(b)$ は $b=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき最大値を，$b=\sqrt[4]{2}$ のとき最小値をそれぞれとる。これらの b の値を $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+3+\dfrac{2}{b^2}}$ に代入することで，S の最大値は $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27+3\sqrt{5}}{2}}$，最小値は $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ とそれぞれ計算できる。

(答) 最大値: $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27+3\sqrt{5}}{2}}$，最小値: $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{2}$

(1)(i)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}-x_n &= x_n^2-x_n+c \\
&> x_n^2-x_n+\frac{1}{4}\left(\because c>\frac{1}{4}\right) \\
&= \left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

であるから，すべての自然数nに対して$x_n<x_{n+1}$が成り立つ。

(証明終)

(ii)

数列$\{y_n\}$について，漸化式を

$$y_1=d,\ y_{n+1}=y_n+\left(c-\frac{1}{4}\right)\ (n\geqq 1)$$

と定める。このとき，数列$\{y_n\}$は初項d，公差$\left(c-\frac{1}{4}\right)$の等差数列であり，一般項は

$$y_n=\left(c-\frac{1}{4}\right)(n-1)+d$$

となる。また，$c>\frac{1}{4}$のとき，すべての自然数nについて$y_n\geqq 0$であり，極限について

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$$

を満たす。以下，すべての自然数nについて$x_n\geqq y_n$が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$のとき

$x_1=y_1=d$であるから，$x_1\geqq y_1$が成り立つことが示された。

[2] $n=k$のとき成立することを仮定する

数列$\{x_n\},\{y_n\}$が満たす漸化式を用いることにより，$x_{k+1}-y_{k+1}$は

$$x_{k+1}-y_{k+1}=\left(x_k^2+c\right)-\left\{y_k+\left(c-\frac{1}{4}\right)\right\}=x_k^2-y_k+\frac{1}{4}$$

と変形できる。ここで，帰納法の仮定より$x_k\geqq y_k\ (\geqq 0)$であるから

$$x_k^2-y_k+\frac{1}{4}\geqq y_k^2-y_k+\frac{1}{4}=\left(y_k-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$$

となり，$x_{k+1}\geqq y_{k+1}$が成り立つことが示された。

以上, [1], [2]より，数学的帰納法によって，すべての自然数nについて$x_n\geqq y_n$となることが示された。したがって，数列$\{x_n\},\{y_n\}$に対して，$\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$かつ，すべての自然数$n$について$x_n\geqq y_n$であるから，問題文の内容より，$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$であることがわかる。

(証明終)

(2)

数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1$のとき

$x_1=d$より$\alpha<x_1<\beta$である。また，α,βは$x^2-x+c=0$の2つの異なる実数解であるから

$$
\begin{aligned}
x_2-x_1 &= x_1^2-x_1+c \\
&<0
\end{aligned}
$$

となる。

[2] $n=k$のとき命題が成り立つと仮定する

このとき

$$\alpha<x_k<\beta \text{かつ} x_k>x_{k+1}$$

である。ここでα,βは$x^2-x+c=0$の2つの異なる実数解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=c\end{cases}$$

となる。cは正の実数であるから$\alpha>0,\beta>0$を満たす。よって

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}-\alpha &= x_k^2-\alpha+c \\
&> \alpha^2-\alpha+c\ (\because 0<\alpha<x_k) \\
&=0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \alpha<x_{k+1}<x_k<\beta$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
x_{k+2}-x_{k+1} &= x_{k+1}^2-x_{k+1}+c \\
&<0
\end{aligned}
$$

$$\therefore x_{k+1}>x_{k+2}$$

となる。したがって$n=k+1$のときも命題は成り立つ。

以上, [1], [2]より，すべての自然数nに対して命題は成り立つ。

(証明終)

3

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ		
	3	20	6	35		
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	3	3	4	0	1	2
(3)	サ	シ				
	7	8				
(4)	ス	セ	ソ	タ		
	8	9	5	28		

〔解説〕

(1)

6枚のカードの中から同時に3枚のカードを引くとき，引き方の総数は

$${}_6C_3 = 20\,[\text{通り}]$$

であり，これらは同様に確からしく起こる。また，引いた3枚のカードの最小の数字が3であるような場合の数は，それぞれ4, 5, 6が書かれた3枚のカードの中から2枚のカードを引く場合の数と一致するから

$${}_3C_2 = 3\,[\text{通り}]$$

である。したがって，$p_6 = \dfrac{3}{20}$ であることがわかる。同様に考えて，$p_7 = \dfrac{{}_4C_2}{{}_7C_3} = \dfrac{6}{35}$ であることがわかる。

(2)

$n\,(\geqq 6)$枚のカードの中から同時に3枚のカードを引くとき，引き方の総数は

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,[\text{通り}]$$

であり，これらは同様に確からしく起こる。また，引いた3枚のカードの最小の数字が3であるような場合の数は，それぞれ4からnまでの数字が書かれた$n-3$枚のカードの中から2枚のカードを引く場合の数と一致するから

$${}_{n-3}C_2 = \frac{(n-3)(n-4)}{2}\,[\text{通り}]$$

である。したがって，

$$p_n = \frac{\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{3(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$$

であることがわかる。

(3)

(2)の結果より

$$p_n < p_{n+1} \iff \frac{3(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} < \frac{3(n-2)(n-3)}{(n+1)n(n-1)}$$

$$\iff 3(n+1)n(n-1)(n-3)(n-4) < 3n(n-1)(n-2)^2(n-3) \quad (\because n \geqq 6)$$

$$\iff (n+1)(n-4) < (n-2)^2 \quad (\because n \geqq 6)$$

$$\iff n < 8$$

となるから，これを満たす最大の自然数$n\,(\geqq 6)$は$n = 7$である。また，同様にして

$$p_n = p_{n+1} \iff n = 8$$

$$p_n > p_{n+1} \iff n > 8$$

であることがわかる。

(4)

(3)の結果より，確率$p_n\,(n \geqq 6)$について

$$p_6 < p_7 < p_8 = p_9 > p_{10} > \cdots$$

となることがわかるから，(2)の結果と合わせて，$n = 8, 9$のとき，p_nは最大値

$$p_8\,(= p_9) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{28}$$

をとることがわかる。

4

〔解答〕

(1)	(d)
(2)	(a)
(3)	(g)
(4)	(j)

〔解説〕

$y=F(x)$のグラフを考えるために,

①$y=f(x)$とx軸が囲む面積

②$F(x)$の導関数が$f(x)$であること。特に$f(x)=0$となる点が極値となる場合

③$f(x)$の傾きが$F(x)$の二次導関数を表すこと

の3つの事に注意して考える。また，$f(x)$が連続であるとき$F(x)$は微分可能, つまりなめらかであることに気を付ける。(1)〜(4)のグラフは全て連続であるから，対応する$F(x)$は全てなめらかになることを考えると, (c), (f)は選択肢として除外できる。

(1)

$y=f(x)$のグラフからわかる$y=F(x)$の特徴をいくつか挙げると

[1] $f(x)$は負の値をとるため，$F(x)$は単調ではない

[2] $x=1.6$付近で極大値をとる

[3] $x=3.2$付近で極小値をとる

[4] 正の領域のほうが明らかに大きいため，$F(x)$は負の値をとらない

となる。以上の条件を満たすのは(d)のグラフのみである。

(2)

$y=f(x)$のグラフからわかる$y=F(x)$の特徴をいくつか挙げると

[1] $f(x)$は常に正であるため，$F(x)$は単調増加する

[2] $x=2, 4$で$f(x)=0$となる

[3] $x<1$において下に凸である

となる。以上の条件を満たすのは(a)のグラフのみである。

(3)

$y=f(x)$のグラフからわかる$y=F(x)$の特徴をいくつか挙げると

[1] $f(x)$は常に正であるため，$F(x)$は単調増加する

[2] $x=3$で$f(x)=0$となる

[3] $x<1$において下に凸である

となる。以上の条件を満たすのは(g)のグラフのみである。

(4)

$y=f(x)$のグラフからわかる$y=F(x)$の特徴をいくつか挙げると

[1] $x=0.6$付近で極大値をとる

[2] $x=3.4$付近で極小値をとる

[3] $x=2$付近で変曲点を取る。これより小さい値のとき，$F(x)$は上に凸である

となる。以上の条件を満たすのは(j)のみである。