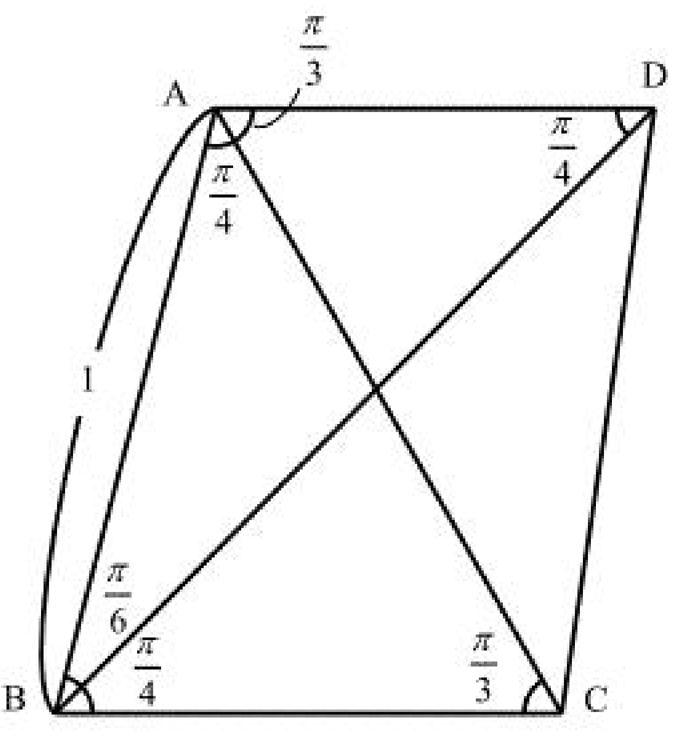
1

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	6	3	1	2	3	2	2	3	3	6
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ				
	−3	4	0	4	27	4				

〔解説〕

(1)



△ABCにおいて，三角形の内角の和はπであるので，

$$\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB=\pi$$

$$\therefore \angle ACB=\pi-\angle ABC-\angle BAC=\pi-\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$$

となる。同様に，△ABDにおいて，三角形の内角の和はπであるので，

$$\angle ABD+\angle BAD+\angle ADB=\pi$$

$$\therefore \angle ADB=\pi-\angle ABD-\angle BAD=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{7}{12}\pi=\frac{\pi}{4}$$

となる。△ABCにおいて正弦定理を用いると，

$$\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore BC=AB\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}}=1\times\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

となる。同様に△ABDに正弦定理を用いると，

$$\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{BD}{\sin\frac{7}{12}\pi}$$

$$\therefore BD=AB\times\frac{\sin\frac{7}{12}\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

となるが，加法定理より，

$$\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

であるから，

$$BD=1\times\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。$\angle DBC=\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$であるから，△BCDに余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}CD^2&=BD^2+BC^2-2\cdot BD\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{4}\\&=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\\&=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

である。

(2)

3次関数$y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$とおく。問題文より$f(1)=2$であるので，

$$\begin{aligned}&f(1)=2\\&\Leftrightarrow 1+a+b+c=2\\&\Leftrightarrow a+b+c=1 \qquad \cdot\cdot\cdot①\end{aligned}$$

である。このグラフは点$(1, 2)$に関して対称であるので，$(0, f(0))$と$(2, f(2))$の中点は$(1, 2)$

となる。よって，

$$\begin{aligned}&\frac{f(0)+f(2)}{2}=2\\&\Leftrightarrow\frac{c+(8+4a+2b+c)}{2}=2\\&\Leftrightarrow 2a+b+c=-2 \qquad \cdot\cdot\cdot②\end{aligned}$$

である。②−①より

$$a=-3$$

であり，これを①に代入して

$$-3+b+c=1\Leftrightarrow b+c=4$$

となる。さらに，この関数のグラフがx軸に接するとき，このx座標をβとし，複素数αを用いて，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha)(x-\beta)^2\\&=x^3-(\alpha+2\beta)x^2+(2\alpha\beta+\beta^2)x-\alpha\beta^2\end{aligned}$$

とかける。これと関数$f(x)=x^3-3x^2+bx+(4-b)$の係数を比較して，以下の方程式

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=3 & \cdot\cdot\cdot③\\2\alpha\beta+\beta^2=b & \cdot\cdot\cdot④\\-\alpha\beta^2=4-b & \cdot\cdot\cdot⑤\end{cases}$$

を得る。④，⑤式からbを消去すると，

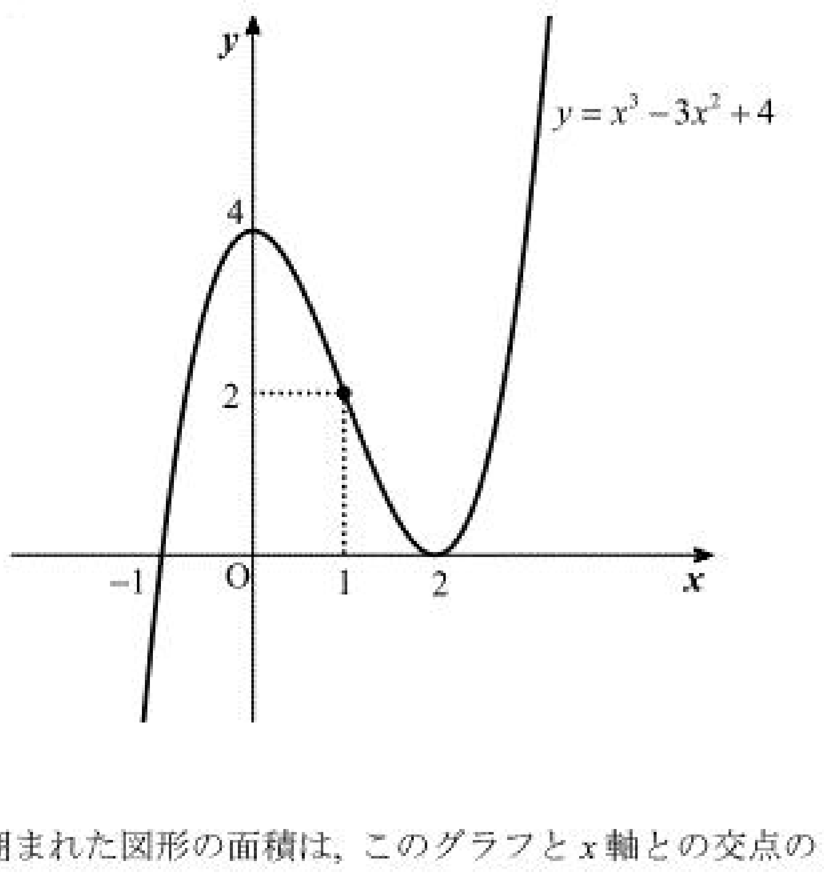
$$2\alpha\beta-\alpha\beta^2+\beta^2=4$$

となり，さらに③式より$\alpha=3-2\beta$を代入して整理すると，

$$\begin{aligned}&\beta^3-3\beta^2+3\beta-2=0\\&\Leftrightarrow(\beta-2)(\beta^2-\beta+1)=0\end{aligned}$$

となる。ここで，$\beta^2-\beta+1=\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$であるから，$\beta=2$であり，③，④式より

$\alpha=-1, b=0$となる。また$b+c=4$より$c=4$である。



x軸とこのグラフで囲まれた図形の面積は，このグラフとx軸との交点のx座標が$x=-1, 2$であるから，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}f(x)dx&=\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2dx\\&=\int_{-1}^{2}(x-2+3)(x-2)^2dx\\&=\int_{-1}^{2}\left\{(x-2)^3+3(x-2)^2\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{4}(x-2)^4+(x-2)^3\right]_{-1}^{2}\\&=-\frac{81}{4}+27\\&=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	チ	ツ							
	2	1							
(2)	テ	ト							
	4	3							
(3)	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ
	0	1	2	−7	4	−3	8	7	8

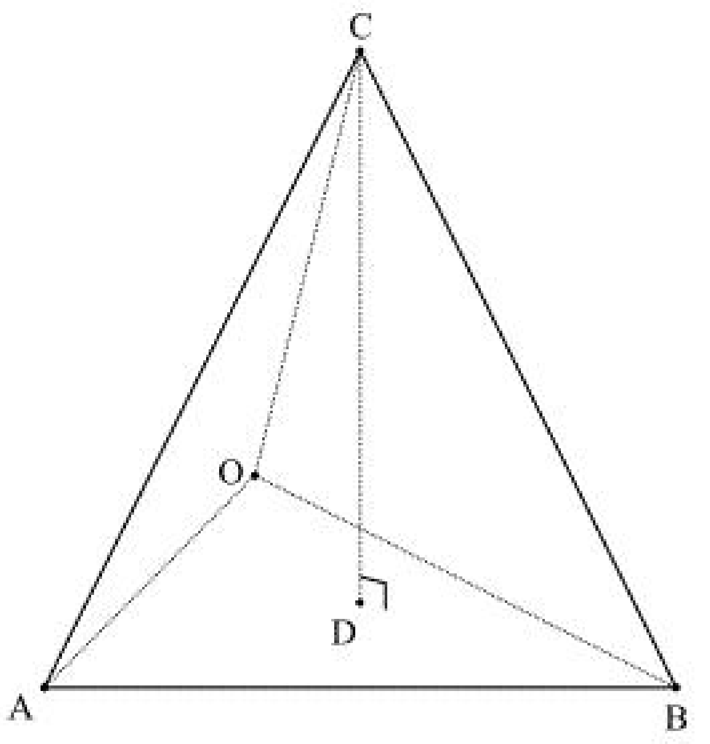
〔解説〕

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ と表記する。条件より,

$$\left|\vec{a}\right|=1,\ \left|\vec{b}\right|=3,\ \left|\vec{c}\right|=5,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=3,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=11$$

が成り立つ。

(1)



点Dが平面OAB上にあるから, s,t を実数として,

$$\overrightarrow{OD}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

とかける。よって,

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$$

であるが, これが平面OABと直交するから,

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}\cdot\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\right)=0\\ \vec{b}\cdot\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}s+t-3=0\\ s+9t-11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(s,t)=(2,1)$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{CD}\right|^2&=\left|2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|^2\\&=4\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-4\vec{a}\cdot\vec{c}\\&=4+9+25+4-22-12=8\end{aligned}$$

より, $\left|\overrightarrow{CD}\right|=2\sqrt{2}$ である。また, △OABの面積は,

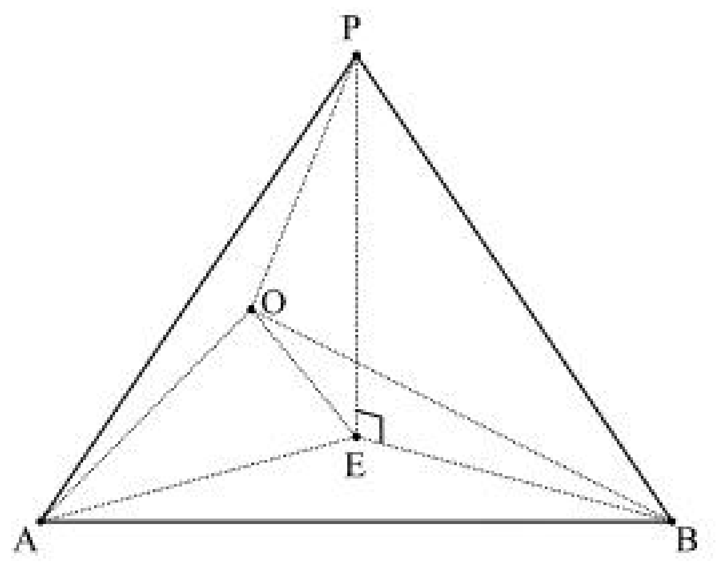
$$\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9-1}=\sqrt{2}$$

である。よって四面体OABCの体積は,

$$\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=\frac{4}{3}$$

となる。

(3)



△PEO, △PEA, △PEBに着目すると, これらはすべて直角三角形であり, OP = AP = BP, またPEが共通であることから, これらの三角形は合同である。よってEO = EA = EBであるから点Eは△OABの外心である。また, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$ において

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2\\&=1-1\\&=0\end{aligned}$$

であるので, △OABは $\angle OAB=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であり, 外心Eは辺OBの中点と一致する。

よって

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

となる。(1)より, $\overrightarrow{CD}$ は平面OABに垂直な方向ベクトルであるから, n を実数として,

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OE}+n\overrightarrow{CD}=2n\vec{a}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\vec{b}-n\vec{c}$$

と表せる。$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{CP}\right|$ より,

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|\overrightarrow{CP}\right|^2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left(\overrightarrow{OP}-\vec{c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OP}\cdot\vec{c}=\left|\vec{c}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left\{2n\vec{a}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\vec{b}-n\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=\left|\vec{c}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow 12n+(2n+1)\times11-50n=25$$

$$\therefore n=-\frac{7}{8}$$

となる。したがって,

$$\overrightarrow{OP}=-\frac{7}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{7}{8}\overrightarrow{OC}$$

である。

3

〔解答〕

(1)	ホ	60
(2)	マ	20
(3)	ミ	60
(4)	ム	12
(5)	メ	38

〔解説〕

(1)

条件Pを満たすカードの入れ方を考える。7枚のカードのうち，赤い箱に入れる連続した2枚のカードの選び方が6通り，残りの5枚のカードのうち，青い箱に入れる2枚のカードの選び方が${}_5C_2=10$通りであり，残りのカードを白い箱に入れればよいから，題意を満たす入れ方の総数は，

$$6\times10\times1=60\,(\text{通り})$$

となる。

(2)

赤の箱に入れる連続した2つのカードの番号で場合分けをする。

[1] 赤の箱に入る数字が1, 2のとき

このとき青い箱に入る2つのカードの番号は，3から7のカードのうちから連続した2枚を選ぶから4通りである。

[2] 赤の箱に入る数字が2, 3のとき

このとき青い箱に入る2つのカードの番号は，4から7のカードのうちから連続した2枚を選ぶから3通りである。

[3] 赤の箱に入る数字が3, 4のとき

このとき青い箱に入る2つのカードの番号は，1, 2または5から7のカードのうちの連続した2枚であるから$1+2=3$通りである。

[4] 赤の箱に入る数字が4, 5のとき

[3]と同様に考えて3通りである。

[5] 赤の箱に入る数字が5, 6のとき

[2]と同様に考えて3通りである。

[6] 赤の箱に入る数字が6, 7のとき

[1]と同様に考えて4通りである。

以上[1]~[6]より，条件Pと条件Qを満たす赤と青の箱へのカードの入れ方は，

$$4+3+3+3+3+4=20\,(\text{通り})$$

であり，このとき白い箱には残ったカードを入れればよいから，条件Pと条件Qを満たすカードの入れ方は$20\times1=20$通りとなる。

(3)

条件Rを満たす白い箱に入るカードの番号の組み合わせを書き出すと，

1−3−5	2−4−6	3−5−7
1−3−6	2−4−7	
1−3−7	2−5−7	
1−4−6		
1−4−7		
1−5−7		

の10通りある。残りの4枚のカードを赤と青の箱に2枚ずつ入れる入れ方は${}_4C_2=6$通りである。したがって条件Rを満たすカードの入れ方の総数は，

$$10\times6=60\,(\text{通り})$$

となる。

(4)

(3)で書き出したそれぞれの場合について条件Pを満たす赤い箱に入れるカードを書き出すと以下のようになる。

白い箱	赤い箱	白い箱	赤い箱
1−3−5	6−7	2−4−6	×
1−3−6	4−5	2−4−7	5−6
1−3−7	4−5, 5−6	2−5−7	3−4
1−4−6	2−3	3−5−7	1−2
1−4−7	2−3, 5−6		
1−5−7	2−3, 3−4		

したがって条件Pと条件Qを満たすような白い箱，赤い箱へのカードの入れ方は全部で12通りであり，このとき残りの2枚のカードは青い箱へ入れればよいから，条件Pと条件Qをともに満たすカードの入れ方は，$12\times1=12$通りとなる。

(5)

条件Qと条件Rを満たすカードの入れ方は(3)と同様に考えて12通りである。また，条件P, Q, Rをすべて満たすようなカードの入れ方は，白に1−4−7をいれ，赤に2−3，青に5−6，もしくは赤に5−6，青に2−3を入れる場合であり，2通りである。したがって条件Qと条件Rをどちらも満たさず，かつ条件Rを満たすカードの入れ方は，(3), (4)の結果を用いて，

$$60-12-12+2=38\,(\text{通り})$$

となる。