$\boxed{1}$

〔解答〕

(1)	$\boxed{ア}$	$\boxed{イ}$	$\boxed{ウ}$	$\boxed{エ}$	$\boxed{オ}$
	3	3	4	1	1
(2)	$\boxed{カ}$	$\boxed{キ}$	$\boxed{ク}$		
	3	1	3		

〔解説〕

(1)

(i)

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)+\beta &= (\alpha-\beta)i+\beta \\
&= \left\{1-\left(2+\sqrt{3}\right)i\right\}i+1+3i \\
&= 2+\sqrt{3}+i+1+3i \\
&= 3+\sqrt{3}+4i
\end{aligned}
$$

となる。

(ii)

求める点を z とおくと

$$
\begin{aligned}
&(\alpha-z)\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)+z=\beta \\
&\Leftrightarrow \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)z=\beta-\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\beta-\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}} \\
&= \frac{2(1+3i)+\left\{2+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right\}\left(\sqrt{3}-i\right)}{2+\sqrt{3}-i} \\
&= \frac{2(1+3i)+\left\{\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(5-\sqrt{3}\right)i\right\}}{2+\sqrt{3}-i} \\
&= \frac{3+\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2+\sqrt{3}-i} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)\left(2+\sqrt{3}+i\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+2\sqrt{3}\right)(1+i)}{8+4\sqrt{3}} \\
&= 1+i
\end{aligned}
$$

となる。

(2)

与式 w について $|z|=1$ に注意しつつ計算すると

$$
\begin{aligned}
|w|^2 &= w\overline{w} \\
&= \frac{-z+2i}{2z+i}\cdot\overline{\left(\frac{-z+2i}{2z+i}\right)} \\
&= \frac{-z+2i}{2z+i}\cdot\frac{-\overline{z}-2i}{2\overline{z}-i} \\
&= \frac{|z|^2+2i\left(z-\overline{z}\right)+4}{4|z|^2-2i\left(z-\overline{z}\right)+1} \\
&= \frac{5+2i\left(z-\overline{z}\right)}{5-2i\left(z-\overline{z}\right)}
\end{aligned}
$$

と変形することができる。ここで，$z=a+bi$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&|z|=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1 \\
&z-\overline{z}=a+bi-(a-bi) \\
&\quad =2bi
\end{aligned}
$$

であり，$-1 \leqq b \leqq 1$ が成り立つため，

$$
\begin{aligned}
|w|^2 &= \frac{5+2i\left(z-\overline{z}\right)}{5-2i\left(z-\overline{z}\right)} \\
&= \frac{5-4b}{5+4b} \\
&= \frac{10}{5+4b}-1
\end{aligned}
$$

と表せる。これは b について単調減少であるから，

$$
\begin{aligned}
&\frac{10}{5+4\cdot1}-1 \leqq \frac{10}{5+4b}-1 \leqq \frac{10}{5+4\cdot(-1)}-1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{9} \leqq |w|^2 \leqq 9 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqq |w| \leqq 3
\end{aligned}
$$

となる。よって w の取りうる値の最大値は $z=-i$ のとき 3，最小値は $z=i$ のとき $\frac{1}{3}$ である。

2

〔解答〕

(1)	ケ	コ	サ	シ	ス
	1	4	5	3	5
(2)	セ	ソ			
	2	11			
(3)	タ	チ	ツ	テ	
	0	3	2	10	

〔解説〕

(1)

点 M, N はそれぞれ一定速度で直線上を動くので，時刻 t において，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{CN}}$ はそれぞれ，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{t}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (t,\ 0,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{t}{5}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \left(0,\ \frac{4}{5}t,\ \frac{3}{5}t\right)$$

である。よって、点 M, N の座標は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} = (t,\ -1,\ 4)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CN}} = \left(3,\ \frac{4}{5}t,\ 1+\frac{3}{5}t\right)$$

となる。

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}\mathrm{MN}^2 &= (t-3)^2 + \left(-1-\frac{4}{5}t\right)^2 + \left\{4-\left(1+\frac{3}{5}t\right)\right\}^2 \\ &= 2t^2 - 8t + 19 \\ &= 2(t-2)^2 + 11\end{aligned}$$

となるので，$t=2$ で MN は最小値 $\sqrt{11}$ をとる。

(3)

点 $(0,\ 0,\ 1)$ を点 L とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = (t,\ -1,\ 3)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{LN}} = \left(3,\ \frac{4}{5}t,\ \frac{3}{5}t\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LN}} = t \cdot 3 + (-1) \cdot \frac{4}{5}t + 3 \cdot \frac{3}{5}t = 4t$$

となる。よって，△LMN の面積は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{LM}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{LN}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{LM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LN}}\right)^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{(t^2+10)(t^2+9)-(4t)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{t^4+3t^2+90}\end{aligned}$$

となり，4 次関数 t^4+3t^2+90 は $t \geqq 0$ で単調増加するから，$t=0$ で最小値

$$\frac{1}{2}\sqrt{90} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

をとることがわかる。

3

〔解答〕

(1)	ト		
	1		
(2)	ナ	ニ	ヌ
	1	2	−1
(3)	ネ	ノ	ハ
	6	−1	2
(4)	ヒ	フ	
	−2	2	
(5)	ヘ	ホ	マ
	−2	3	2

〔解説〕

(1)

曲線 C と直線 ℓ の接点の x 座標を t とおく。ここで，C のグラフの式 $y=e^x$ を x で微分すると

$$y'=e^x$$

となるから，C 上の点 (t,e^t) における接線の方程式は

$$y=e^t(x-t)+e^t \Leftrightarrow y=e^tx+(1-t)e^t$$

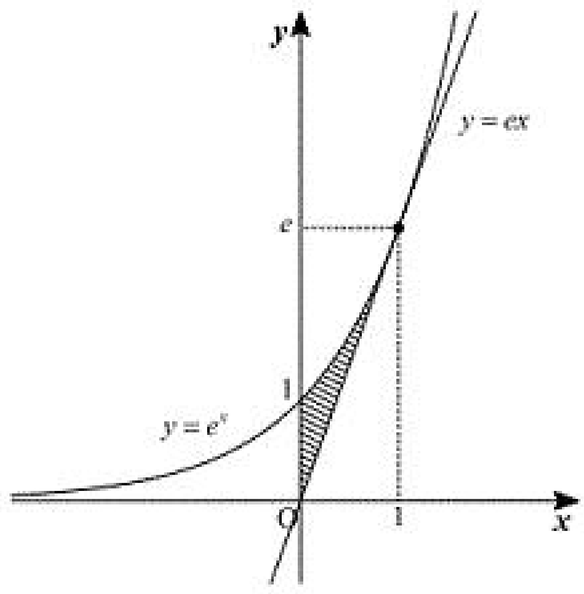
である。この接線が原点を通るとき

$$0=0+(1-t)e^t \Leftrightarrow t=1$$

となるから，求める接点の x 座標は $t=1$ であることがわかる。

(2)

曲線 C と直線 ℓ の位置関係は下図の通りとなる。また，D は下図の斜線部となる。



上図より，D の面積を S とおくと，

$$S=\int_0^1(e^x-ex)\,dx$$
$$=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}e-1$$

と計算できる。

(3)

求める回転体の体積を V_1 とおくと，

$$V_1=\pi\int_0^1(e^x)^2\,dx-\pi\int_0^1(ex)^2\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{e^2}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2}\right)$$

と計算できる。

(4)

与式 $\dfrac{d}{dx}\left\{(x^2+ax+b)e^x\right\}=x^2e^x$ の左辺を計算すると，

$$\frac{d}{dx}\left\{(x^2+ax+b)e^x\right\}=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$$
$$=\left\{x^2+(2+a)x+a+b\right\}e^x$$

となる。よって右辺と係数比較することで，

$$\begin{cases}2+a=0\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$$

と a,b の値が求められる。

(5)

曲線 C の $1\leqq y\leqq e$ の部分について，$x=g(y)$ と表すことにする。このとき，x,y は次のように対応する。

$$y=e^x,\quad \frac{dy}{dx}=e^x$$

x	$0 \to 1$
y	$1 \to e$

したがって，求める回転体の体積を V_2 とおくと，(4)の結果を利用することで

$$V_2=\pi\int_0^e\left(\frac{y}{e}\right)^2dy-\pi\int_1^e g(y)^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^e\left(\frac{y}{e}\right)^2dy-\pi\int_0^1 g(y)^2\cdot\frac{dy}{dx}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{e^2}\int_0^e y^2dy-\pi\int_0^1 x^2e^x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{e^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^e-\pi\left[(x^2-2x+2)e^x\right]_0^1$$
$$=\pi\frac{e}{3}-\pi(e-2)$$
$$=\pi\left(-\frac{2}{3}e+2\right)$$

と計算できる。

$\boxed{4}$

〔解答〕

(1)	$\boxed{ミ}$	$\boxed{ム}$	$\boxed{メ}$		
	11	10	5		
(2)	$\boxed{モ}$	$\boxed{ヤ}$	$\boxed{ユ}$		
	16	2	3		
(3)	$\boxed{ヨ}$	$\boxed{ラ}$	$\boxed{リ}$	$\boxed{ル}$	
	1	4	7	10	
(4)	$\boxed{レ}$	$\boxed{ロ}$	$\boxed{ワ}$	$\boxed{ヲ}$	$\boxed{ン}$
	3	4	−1	2	−1

〔解説〕

(1)

$m=10$のとき，各回の石が置かれる点の番号は以下のようになる。なお，斜線は石が取り除かれることを示している。

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
白	$\cancel{5}$		8		1		4		7		10
黒		3		6		9		2		5	

表より，11回で操作は終了する。最後にいる点の番号は10であり，置かれている黒石は5個である。

(2)

$m=11$のとき，各回の石が置かれる点の番号は以下のようになる。

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
白	5		8		11		3		6		9		1		4	
黒		$\cancel{3}$		$\cancel{6}$		$\cancel{9}$		$\cancel{1}$		$\cancel{4}$		7		10		2

表より，16回で操作は終了する。最後にいる点の番号は2であり，置かれている黒石は3個である。

(3)

$m=12$のとき，各回の石が置かれる点の番号は以下のようになる。

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯
白	5		8		11		2		5	
黒		3		6		9		12		

表より，9回目からは1~8回目の動きを繰り返すので，1, 4, 7, 10の点には石が置かれず操作は終了しない。

(4)

(1), (2), (3)の結果より，mを3で割った余りで分類して考える。

[1] mが自然数nを用いて$m=3n$と表されるとき

$m=3n\,(n \geqq 2)$と表されるとき，操作Aと操作Bの繰り返し移動を続け，石を置く操作の詳細についてまとめると，以下の表のようになる。

点	1	2	3	4	5	6	⋯	X	Y	Z	⋯	$3n-2$	$3n-1$	$3n$
1週目			●		○	●	⋯		○	●	⋯		○	●
2周目		○	●		○	●	⋯		○	●	⋯		○	●
3周目		○	●		○	●	⋯		○	●	⋯		○	●
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮			⋮	⋮			⋮	⋮

○：白石，●：黒石

1周目：1周目に置く石，2周目：2周目に置く石，終了時：操作終了時に置かれている石

X：3で割って1余る数，Y：3で割って2余る数，Z：3の倍数

上表より，2周目以降は同じ石の置き方が繰り返され，点$3k-2\,(k=1, 2, \dots, n)$に石が置かれることはないから，操作は終了しない。

[2] mが自然数nを用いて$m=3n+1$と表されるとき

$m=3n+1\,(n \geqq 2)$と表されるとき，操作Aと操作Bの繰り返し移動を続け，石を置く操作の詳細についてまとめると，以下の表のようになる。

点	1	2	3	4	5	6	⋯	X	Y	Z	⋯	$3n-5$	$3n-4$	$3n-3$	$3n-2$	$3n-1$	$3n$	$3n+1$
1周目			●		○	●	⋯		○	●	⋯		○	●		○	●	
2周目	○	●		○	●		⋯	○	●		⋯	○	●		○			○
終了時	○	●	●	○	●	●	⋯	○	●	●	⋯	○	●	●	○	○	●	○

○：白石，●：黒石

1周目：1周目に置く石，2周目：2周目に置く石，終了時：操作終了時に置かれている石

X：3で割って1余る数，Y：3で割って2余る数，Z：3の倍数

上表より，操作は終了する。

[3] mが自然数nを用いて$m=3n+2$と表されるとき

$m=5$と表されるとき，操作Aと操作Bの繰り返し移動を続け，石を置く操作の詳細についてまとめると，以下の表のようになる。

点	1	2	3	4	5
1周目			●		○
2周目	●		○	●	
3周目	○	●		○	
終了時	○	●	○	○	○

○：白石，●：黒石

1周目：1周目に置く石，2周目：2周目に置く石，終了時：操作終了時に置かれている石

X：3で割って1余る数，Y：3で割って2余る数，Z：3の倍数

また，$m=3n+2\,(n \geqq 2)$と表されるとき，操作Aと操作Bの繰り返し移動を続け，石を置く操作の詳細についてまとめると，以下の表のようになる。

点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯	X	Y	Z	⋯	$3n-2$	$3n-1$	$3n$	$3n+1$	$3n+2$
1周目			●		○	●		○	●	⋯		○	●	⋯		○	●		○
2周目	●		○	●		○	●		○	⋯	●		○	⋯	●		○	●	
3周目	○	●		○						⋯				⋯					
終了時	○	●	○	○	○	○	●	○	○	⋯	●	○	○		●	○	○	●	○

○：白石，●：黒石

1周目：1周目に置く石，2周目：2周目に置く石，終了時：操作終了時に置かれている石

X：3で割って1余る数，Y：3で割って2余る数，Z：3の倍数

以上より，$m=3n+2\,(n \geqq 1)$のとき操作は終了する。

以上[1], [2], [3]より，操作が終了しないための必要十分条件は，mが3で割り切れることである。また，$m=3n+1$のとき，[2]の表より，点の数は$3n+1$個，石が2回置かれる点は，点$5, 8, \dots, 3n-4$の$n-2$個あるから

$$3n+1+(n-2)=4n-1\text{(回)}$$

石を置くと操作は終了する。さらに，終了したときに置かれている黒石は，

$$(3n-3)\cdot\frac{2}{3}+1=2n-1\text{(個)}$$

である。