1

〔解答〕

(1)		(あ)	(い)	(う)	(え)				
		(b)	(a)	(b)	(a)				
(2)		ア	イ	ウ	エ	オ	カ		
		1	4	2	−1	4	6		
(3)	(i)	お	キ						
		(f)	3						
	(ii)	か	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
		(d)	3	2	3	1	4	−1	3

〔解説〕

(1)

分数を既約分数の形にしたとき，分母の素因数が 2, 5 のみならば有限小数であり，分母の素因数に 2, 5 以外のものがあるならば循環小数である性質を用いる。

(あ)

$\frac{5}{37}$ は，分母の素因数に 2, 5 以外のものがあるから循環小数である。

(い)

$\frac{51}{85}$ を約分すると

$$\frac{51}{85}=\frac{3}{5}$$

より，分母の素因数に 2, 5 以外のものが含まれないから，$\frac{51}{85}$ は有限小数である。

(う)

$\frac{27}{42}$ を約分すると

$$\frac{27}{42}=\frac{9}{14}=\frac{9}{2\cdot 7}$$

より，分母の素因数に 2, 5 以外のものがあるから，$\frac{27}{42}$ は循環小数である。

(え)

$\frac{5}{128}$ について

$$\frac{5}{128}=\frac{5}{2^7}$$

より，分母の素因数に 2, 5 以外のものが含まれないから，$\frac{5}{128}$ は有限小数である。

(2)

加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos\left(60^\circ+45^\circ\right)\\ &= \cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{6}\end{aligned}$$

となる。

(3)

(i)

$f(x)$ を x で微分すると，

$$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+3(2a+3)$$

となる。$f(x)$ が極大値と極小値をとる必要十分条件は $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。よって，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，条件は

$$\begin{aligned}&\frac{D}{4}>0\\ &\Leftrightarrow (a+6)^2-3\cdot 3(2a+3)>0\\ &\Leftrightarrow a^2-6a+9>0\\ &\Leftrightarrow (a-3)^2>0\\ &\therefore a\neq 3\end{aligned}$$

となる。

(ii)

$f'(x)$ を因数分解すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-2(a+6)x+3(2a+3)\\ &=\{3x-(2a+3)\}(x-3)\end{aligned}$$

より，$f(x)$ が $x=3$ で極大値をとるときの増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	3	$\cdots$	$\frac{2}{3}a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

上表より，$f(x)$ が $x=3$ で極大値をとる必要十分条件は

$$\begin{aligned}&3<\frac{2}{3}a+1\\ &\Leftrightarrow a>3\end{aligned}$$

である。ここで，$f(x)$ を因数分解すると

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-(a+6)x^2+3(2a+3)x-9a\\ &=(x-3)\{x^2-(a+3)x+3a\}\\ &=(x-3)^2(x-a)\end{aligned}$$

より，$f(x)$ の極小値は $x=\frac{2}{3}a+1$ で

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{3}a+1\right)&=\left(\frac{2}{3}a+1-3\right)^2\left(\frac{2}{3}a+1-a\right)\\ &=4\left(\frac{1}{3}a-1\right)^2\left(-\frac{1}{3}a+1\right)\\ &=4\left(-\frac{1}{3}a+1\right)^3\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{2}$

〔解答〕

<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td colspan="2">ソ</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td colspan="2">タ</td></tr>
<tr><td colspan="2">10</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(3)</td><td rowspan="2">(i)</td><td>チ</td><td>ツ</td><td>テ</td></tr>
<tr><td>17</td><td>5</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(ii)</td><td>ト</td><td>ナ</td><td>ニ</td><td>ヌ</td><td>ネ</td><td>ノ</td><td>ハ</td><td>ヒ</td></tr>
<tr><td>−2</td><td>7</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>2</td></tr>
</table>

〔解説〕

(1)

$\vec{a}=(\ell-2m+n,\ \ell+m-n)$である。$\vec{a}=\vec{0}$となるとき，$x$成分，$y$成分ともに0になるから

$$\begin{cases}\ell-2m+n=0 & \cdots① \\ \ell+m-n=0 & \cdots②\end{cases}$$

となる。②−①より，

$$3m-2n=0 \quad \cdots③$$

となる。③を満たす1以上6以下の整数m, nは

$$(m, n)=(2, 3), (4, 6)$$

であるから，それぞれ①に代入することによって，求める(ℓ, m, n)は

$$(\ell, m, n)=(1, 2, 3), (2, 4, 6)$$

の2組となる。

(2)

$\overrightarrow{OA}=(\ell, \ell)$より，$\overrightarrow{OA}\parallel\vec{a}$となるとき$\vec{a}$の$x$成分と$y$成分は等しくなるから

$$\ell-2m+n=\ell+m-n$$
$$\Leftrightarrow 3m-2n=0$$

となる。これは(1)の③と同じ式であるから，条件を満たすm, nは(1)と同様に

$$(m, n)=(2, 3), (4, 6)$$

である。このうち$\vec{a}=\vec{0}$を満たすものは(1)で求めた2組ある。1組の(m, n)に対して6通りのℓがあるから，求める答えは

$$6\cdot2-2=10\text{(組)}$$

となる。

(3)

(i)

$\vec{a}$のx成分が2のとき，

$$\ell-2m+n=2$$
$$\Leftrightarrow \ell+n=2m+2 \quad \cdots④$$

が成り立つ。以下，mの値を④に代入して場合分けをする。

[1] $m=1$，すなわち$\ell+n=4$のとき

このとき，条件を満たす1以上6以下の整数ℓ, nは

$$(\ell, n)=(1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

の3組である。

[2] $m=2$，すなわち$\ell+n=6$のとき

このとき，条件を満たす1以上6以下の整数ℓ, nは

$$(\ell, n)=(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

の5組である。

[3] $m=3$，すなわち$\ell+n=8$のとき

このとき，条件を満たす1以上6以下の整数ℓ, nは

$$(\ell, n)=(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

の5組である。

[4] $m=4$，すなわち$\ell+n=10$のとき

このとき，条件を満たす1以上6以下の整数ℓ, nは

$$(\ell, n)=(4, 6), (5, 5), (6, 4)$$

の3組である。

[5] $m=5$，すなわち$\ell+n=12$のとき

このとき，条件を満たす1以上6以下の整数ℓ, nは

$$(\ell, n)=(6, 6)$$

の1組である。

[6] $m=6$，すなわち$\ell+n=14$のとき

このとき，条件を満たす1以上6以下の整数ℓ, nは存在しない。

以上，[1]~[6]より，$\vec{a}$のx成分が2の場合に(ℓ, m, n)は

$$3+5+5+3+1=17\text{(組)}$$

あることが分かる。それらの中で$m=2$であるものは5組，$m=4$であるものは3組ある。

(ii)

(3)(i)で求めた17組の(ℓ, m, n)において，$k=\ell+m-n$をそれぞれ計算することによって，kは$(\ell, m, n)=(1, 2, 5)$のときに最小値-2をとり，$(\ell, m, n)=(6, 3, 2)$のときに最大値7をとることが分かる。

3

〔解答〕

(1)	き				
	(b)				
(2)	フ	ヘ			
	1	3			
(3)	ホ	マ			
	2	5			
(4)	ミ	ム	メ		
	3	4	21		
(5)	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ
	6	9	5	7	6

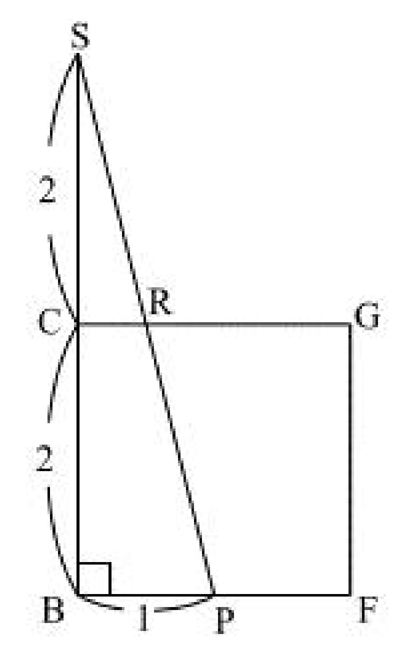
〔解説〕

(1)

直線AQと直線BCの交点をSとすると，直線ASと直線AQは等しいから点Sは平面α上に存在する。よって，直線PSも平面α上に存在する。このとき，直線PSと辺CGは共に平面BCGF上にあるため交わる。以上より，平面αと交わるものは辺CGである。

(2)

DQ＝QCより，AQ＝QS，BC＝CSであるから，点Rの位置は以下のようになる。



上図より，CRの長さは

$$\mathrm{BP}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{BS}}=1\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

となる。よって，求める比は

$$\mathrm{CR}:\mathrm{RG}=\frac{1}{2}:\left(2-\frac{1}{2}\right)=1:3$$

となる。

(3)

AP, AQの長さは三平方の定理より

$$\mathrm{AP}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$
$$\mathrm{AQ}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

となる。PQは辺の長さが1, 1, 2の直方体の対角線の長さより，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

である。よって，△APQに余弦定理を用いると

$$\cos\angle\mathrm{PAQ}=\frac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-\mathrm{PQ}^2}{2\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}}=\frac{5+5-6}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$$

となる。

(4)

QRの長さは三平方の定理より

$$\mathrm{QR}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

となる。また，QSの長さは，△ADQと△SCQは合同であるから

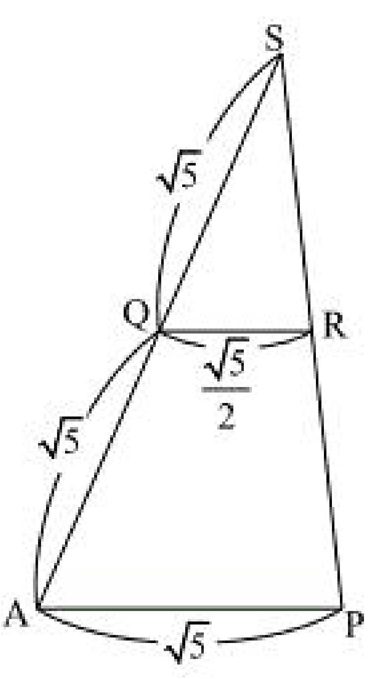
$$\mathrm{QS}=\mathrm{AQ}=\sqrt{5}$$

である。また，(3)とAP // QRより，

$$\sin\angle\mathrm{PAQ}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin\angle\mathrm{RQS}=\sin\angle\mathrm{PAQ}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

である。よって，△APSは以下のようになる。



したがって，求める断面APRQの面積は

$$\triangle\mathrm{APS}-\triangle\mathrm{QRS}=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AS}\cdot\sin\angle\mathrm{PAQ}-\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{QS}\cdot\sin\angle\mathrm{RQS}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}$$
$$=\frac{3}{4}\sqrt{21}$$

となる。

(5)

平面αで分けられた2つの立体のうち，点Bを含む立体の頂点の数は

A, B, C, P, Q, R

の6個である。次に，辺の数は

AB, AP, AQ, BP, BC, CQ, CR, PR, RQ

の9本である。また，面の数は

△ABP，△CQR，四角形ABCQ，四角形BCRP，四角形APRQ

の5個である。平面αで分けられた2つの立体のうち，点Bを含む立体の体積Vは，四面体SABPの体積から四面体SQCRの体積を引くことにより

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BP}\right)\cdot\mathrm{BS}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QC}\cdot\mathrm{CR}\right)\cdot\mathrm{CS}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\right)\cdot4-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot2$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{7}{6}$$

となる。