1

(1)

$a=1$ のとき，関数 $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{\log(1-x)}{1-x}$$

であり，真数条件と分母の条件より，$f(x)$ の定義域は

$$1-x>0 \text{ かつ } x\neq 1 \Leftrightarrow x<1$$

となる。

(i)

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および2次導関数 $f''(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x)&=\left\{(1-x)^{-1}\cdot\log(1-x)\right\}' \\ &=-(1-x)^{-2}(1-x)'\cdot\log(1-x)+(1-x)^{-1}\cdot(1-x)^{-1}(1-x)' \\ &=\frac{\log(1-x)-1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x)&=\left\{(1-x)^{-2}\cdot\left(\log(1-x)-1\right)\right\}' \\ &=-2(1-x)^{-3}(1-x)'\cdot\left(\log(1-x)-1\right)+(1-x)^{-2}\cdot(1-x)^{-1}(1-x)' \\ &=\frac{2\log(1-x)-3}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

となり，方程式 $f'(x)=0$，$f''(x)=0$ を解くと

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\log(1-x)=1$$
$$\therefore x=1-e$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\log(1-x)=\frac{3}{2}$$
$$\therefore x=1-e\sqrt{e}$$

となる。よって，$f(x)\,(x<1)$ の増減凹凸表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$1-e\sqrt{e}$	$\cdots$	$1-e$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	⤴	変曲点	↗	極大	↘	

ここで，極値をとる点と変曲点の座標は，それぞれ

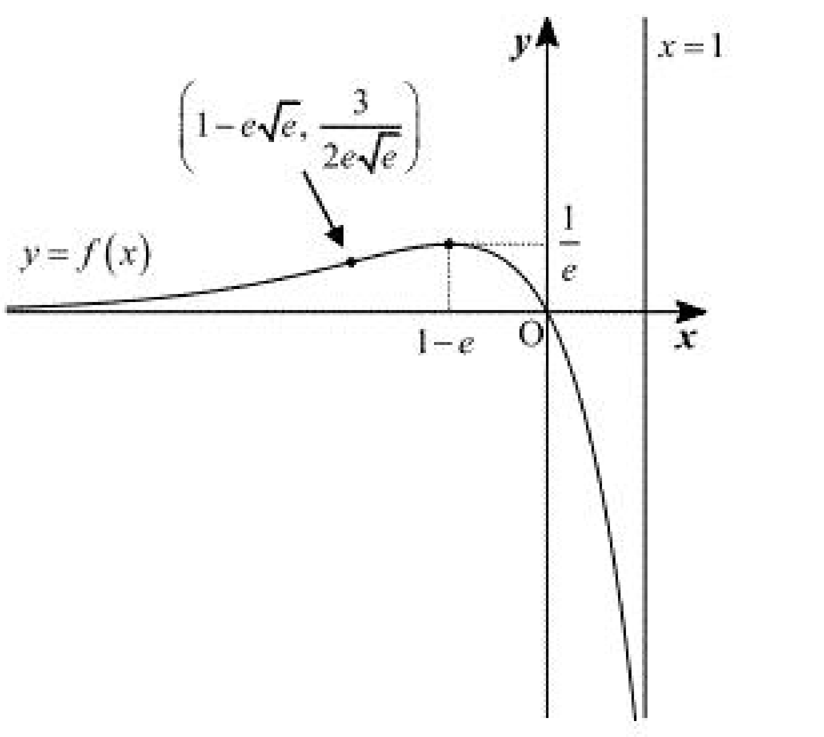
極大値をとる点：$\left(1-e,\ f(1-e)\right)=\left(1-e,\ \dfrac{1}{e}\right)$

変曲点：$\left(1-e\sqrt{e},\ f\left(1-e\sqrt{e}\right)\right)=\left(1-e\sqrt{e},\ \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$

であり，$x\to-\infty,\ x\to 1-0$ の極限は

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0\left(\because \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0\right)$$
$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{t\to+0}\frac{\log t}{t}=-\infty\ (1-x=t)$$

である。したがって，関数 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



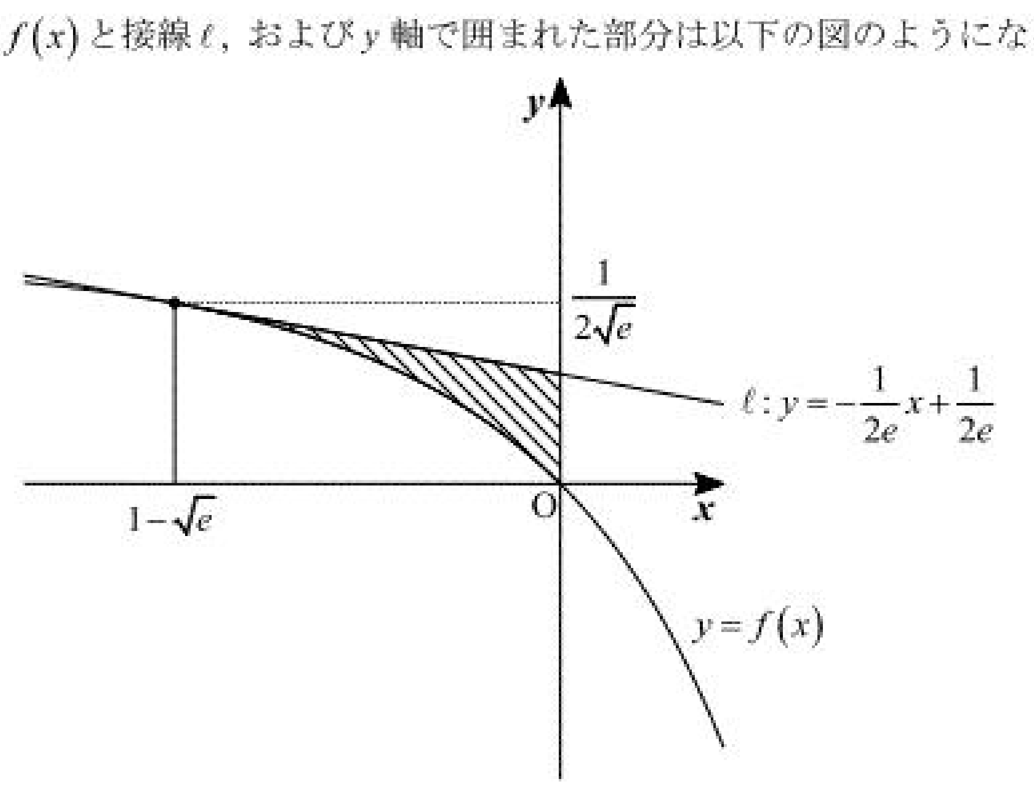
(答) 極大値：$\dfrac{1}{e}\,(x=1-e)$，変曲点：$\left(1-e\sqrt{e},\ \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$，グラフの概形：前図

(ii)

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(1-\sqrt{e},\ f\left(1-\sqrt{e}\right)\right)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は

$$y=f'\left(1-\sqrt{e}\right)\left\{x-\left(1-\sqrt{e}\right)\right\}+f\left(1-\sqrt{e}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2e}\left\{x-\left(1-\sqrt{e}\right)\right\}+\frac{1}{2\sqrt{e}}$$
$$\therefore y=-\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2e}$$

となるから，曲線 $y=f(x)$ と接線 ℓ，および y 軸で囲まれた部分は以下の図のようになる。



したがって，求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{1-\sqrt{e}}^{0}\left\{\left(-\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2e}\right)-\frac{\log(1-x)}{1-x}\right\}dx&=\int_{1-\sqrt{e}}^{0}\left\{-\frac{1}{2e}(x-1)+\log(1-x)\left(\log(1-x)\right)'\right\}dx \\ &=\left[-\frac{1}{4e}(x-1)^2+\frac{1}{2}\left\{\log(1-x)\right\}^2\right]_{1-\sqrt{e}}^{0} \\ &=\frac{1}{4e}(e-1)-\frac{1}{8} \\ &=\frac{1}{8}-\frac{1}{4e} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4e}$

(2)

$a=0$ のとき，関数 $f(x)$ は

$$f(x)=-\frac{\log(1-x)}{x}$$

であり，真数条件と分母の条件より，$f(x)$ の定義域は

$$1-x>0 \text{ かつ } x\neq 0\Leftrightarrow x<0,\ 0<x<1$$

となる。関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x)&=\left\{-x^{-1}\cdot\log(1-x)\right\}' \\ &=x^{-2}\cdot\log(1-x)-x^{-1}\cdot(1-x)^{-1}(1-x)' \\ &=\frac{(1-x)\log(1-x)+x}{x^2(1-x)} \end{aligned}$$

となり，ここで，関数 $g(x)$ を $g(x)=(1-x)\log(1-x)+x$ とおくと，導関数 $g'(x)$ は

$$\begin{aligned} g'(x)&=(1-x)\left\{\log(1-x)\right\}'+(1-x)'\log(1-x)+1 \\ &=(1-x)\cdot\left(-\frac{1}{1-x}\right)-\log(1-x)+1 \\ &=-\log(1-x) \end{aligned}$$

となる。よって，$g(0)=0$ に注意すると，区間 $0<x<1$ における関数 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	(1)
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	(0)	↗	

したがって，$0<x<1$ において $g(x)>0$ である。ここで，導関数 $f'(x)$ は関数 $g(x)$ を用いて

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1-x)}$$

と表せるから，$0<x<1$ において $f'(x)>0$ であることがわかる。ゆえに，$f(x)$ が区間 $0<x<1$ で単調に増加することが示された。

(証明終)

2

(1)

頂点A, Bからそれぞれの対辺またはその延長上に下ろした垂線の交点をH′とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{BH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ である。以下，$\overrightarrow{\mathrm{CH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ を示すことを考える。まず，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OH'}}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{b}-\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}\qquad\cdots①$$

である。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{BH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{BH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\overrightarrow{\mathrm{OH'}}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0\\ \left(\overrightarrow{\mathrm{OH'}}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}\end{cases}\qquad\cdots②$$

であるから，②を①に代入することで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{b}-\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-\left(\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}\right)-\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{c}-\overrightarrow{\mathrm{OH'}}\cdot\vec{c}\right)+\left(-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}\right)+\left(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\\&=0\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{CK}\perp\mathrm{AB}$ または $\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=\vec{0}\ \ (\because\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0})$

となることがわかる。したがって，点H′は頂点Cから直線ABに下ろした垂線上に存在する。ゆえに，H′ = Hであり，頂点A, B, Cからそれぞれの対辺またはその延長上に下ろした垂線の交点は1点で交わることが示された。

(証明終)

(2)

点Gは△ABCの重心であることから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ となるため，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{3}\left\{\left(\vec{b}+\vec{a}\right)+\vec{c}\right\}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2+\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

となる。ここで，点Oは△ABCの外心であることから，$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$ である。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}}{3}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}}{3}$

(3)

点Hは△ABCの垂心であることから，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\vec{c}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\ \left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\right)\\&=\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}\end{aligned}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}$

(4)

(2), (3)の結果より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となるから，これを変形すると

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\qquad\cdots③$$

となる。同様に，$\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ の成立を示すことを考える。まず, (2)と同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\left(\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}}{3}\ \left(\because\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|\right)$$

であり, (3)と同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\ \left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\right)\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

となる。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるから，これを変形すると

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\qquad\cdots④$$

となる。よって，③, ④と問題文で与えられた内容より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

となるから，3点G, H, Oは一直線上にあることが示された。

(証明終)

3

〔解答〕

(1)	$\boxed{ア}$	$\boxed{イ}$	$\boxed{ウ}$
	90	36	18
(2)	$\boxed{エ}$		
	48		
(3)	$\boxed{オ}$		
	08		

〔解説〕

(1)

1日目の担当の組合せは，10時から12時を担当する人を6人の中から2人選び，12時から14時を担当する人を残りの4人の中から2人選ぶ場合の数であるから，

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = 15 \cdot 6 = 90\ (\text{通り})$$

である。

そのうち，A, Bが午後を担当する組合せは，10時から12時を担当する人をA, B以外の4人の中から2人選び，12時から14時を担当する人を残りの4人の中から2人選ぶ場合の数であるから，

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_2 = 6 \cdot 6 = 36\ (\text{通り})$$

である。

A, B, Cの3人が午後を担当する組合せは，10時から12時を担当する人をA, B, C以外の3人の中から2人選び，12時から14時を担当する人を残りの4人の中から2人選ぶ場合の数であるから，

$${}_3C_2 \cdot {}_4C_2 = 3 \cdot 6 = 18\ (\text{通り})$$

である。

(2)

6人を1日目に担当が同じであった2人の組(A, B), (C, D), (E, F)に分けて，誰も1日目の担当と同じ人と組まない組合せを考える。10時から12時を担当する人の選び方は，組分けした3組の中から2組を選び，さらにその2組でそれぞれ1人ずつ，その時間に担当する人を選ぶ場合の数であるから，

$${}_3C_2 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12\ (\text{通り})$$

である。12時から14時を担当する人の選び方は，残りの4人の中から2人を選ぶ場合の数から，12時から14時または14時から16時で1日目と同じ人と組む場合の数2通りを除いたものになるから，

$${}_4C_2 - 2 = 6 - 2 = 4\ (\text{通り})$$

である。よって，誰も1日目の担当と同じ人と組まない組合せは，

$$12 \cdot 4 = 48\ (\text{通り})$$

である。

(3)

10時から12時を担当する人の選び方は，(C, D), (E, F)の2組からそれぞれ1人ずつ選ぶ場合の数であるから，

$$2^2 = 4\ (\text{通り})$$

である。12時から14時を担当する人は，(A, B)のどちらかと(E, F)のうち10時から12時を担当していない人であるから，その選び方は

$$2^1 = 2\ (\text{通り})$$

である。14時から16時を担当する人は残りの2人に決まる。よって，誰も1日目と同じ人とは組まず，かつ誰も1日目と同じ時間帯を担当しない組合せは，

$$4 \cdot 2 = 8\ (\text{通り})$$

である。

4

〔解答〕

(1)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス			
	07	04	−01	03	05	03	−01	02			
(2)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
	−01	02	11	12	02	−01	04	01	02	−03	04

〔解説〕

(1)

A を平面 $z=\frac{1}{2}$ で切った断面を表す不等式は,

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 1,\ y^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x^2 \geqq \frac{3}{4},\ y^2 \geqq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq 1$$

であるから，この断面は一辺の長さが $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ の正方形である。よって，A を平面 $z=\frac{1}{2}$ で切ったときの断面積は,

$$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{7}{4}-\sqrt{3}$$

となる。

同様に，A を平面 $z=t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ で切った断面を表す不等式は,

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x^2+t^2 \geqq 1,\ y^2+t^2 \geqq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x^2 \geqq 1-t^2,\ y^2 \geqq 1-t^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 1$$

であるから，この断面は一辺の長さが $1-\sqrt{1-t^2}$ の正方形である。よって，A を平面 $z=t$ で切ったときの断面積は,

$$\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)^2=2-t^2-2\sqrt{1-t^2}$$

となる。これより，A の体積は

$$\int_0^1\left(2-t^2-2\sqrt{1-t^2}\right)dt=\left[2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1-2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{5}{3}-2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

と立式できる。ここで，$t=\sin\theta$ と置換すると，$\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$ であり，t と θ の対応関係は

t	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

であるから，第2項の定積分の値は

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{dt}{d\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

と求まる。以上より，A の体積は

$$\frac{5}{3}-2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

であることがわかる。

(2)

B を平面 $z=t$ で切った断面を表す不等式は,

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x^2+t^2 \geqq 1,\ y^2+t^2 \geqq 1,\ x^2+y^2 \geqq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x^2 \geqq 1-t^2,\ y^2 \geqq 1-t^2,\ x^2+y^2 \geqq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 1,\ x^2+y^2 \geqq 1 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

である。

まず，B のうち，z 座標が $0 \leqq z \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ の範囲にある部分の体積を求める。$0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

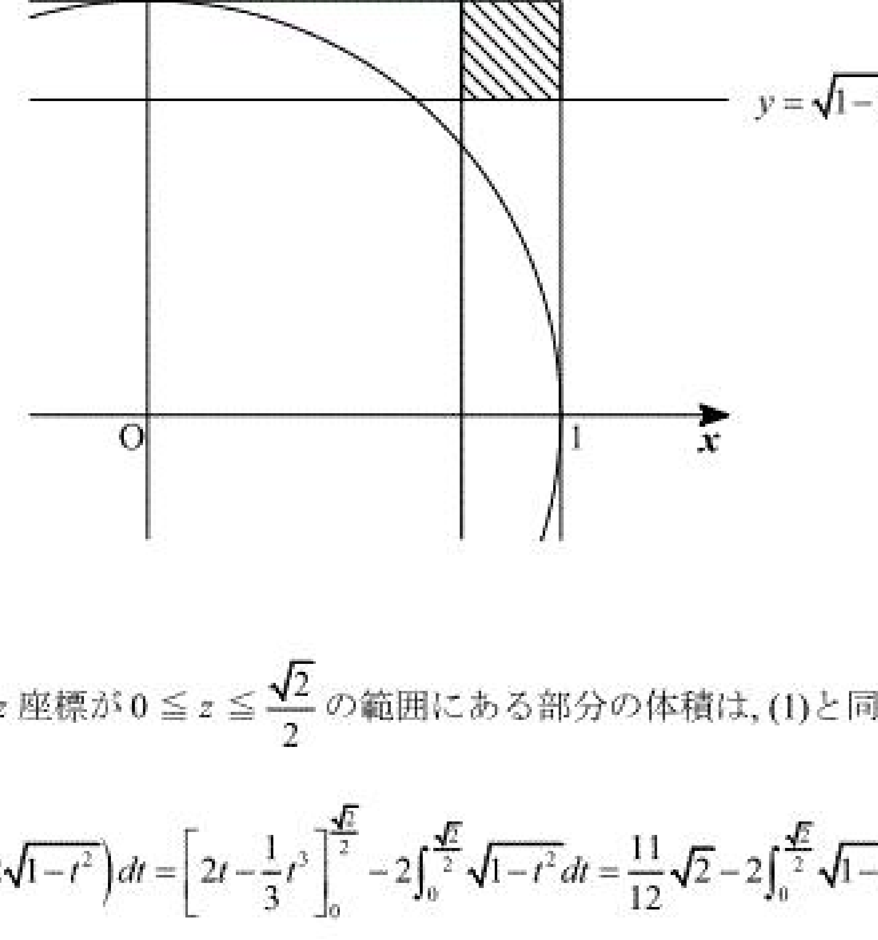
$$\sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 1 \Rightarrow 2\left(1-t^2\right) \leqq x^2+y^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \geqq 1\ \ (\because 2\left(1-t^2\right) \geqq 1)$$

となるから，①は

$$① \Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 1$$

と同値変形できることがわかる。したがって，B を平面 $z=t\,(0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{2}}{2})$ で切った断面は，A と同様であり，一辺の長さが $1-\sqrt{1-t^2}$ の正方形である。



よって，B のうち，z 座標が $0 \leqq z \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ の範囲にある部分の体積は, (1)と同様に考えて

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2-t^2-2\sqrt{1-t^2}\right)dt=\left[2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{11}{12}\sqrt{2}-2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

と立式できる。ここで，$t=\sin\theta$ と置換すると，$\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$ であり，t と θ の対応関係は

t	0	$\to$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

であるから，第2項の定積分の値は

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

と求まる。以上より，求める体積は

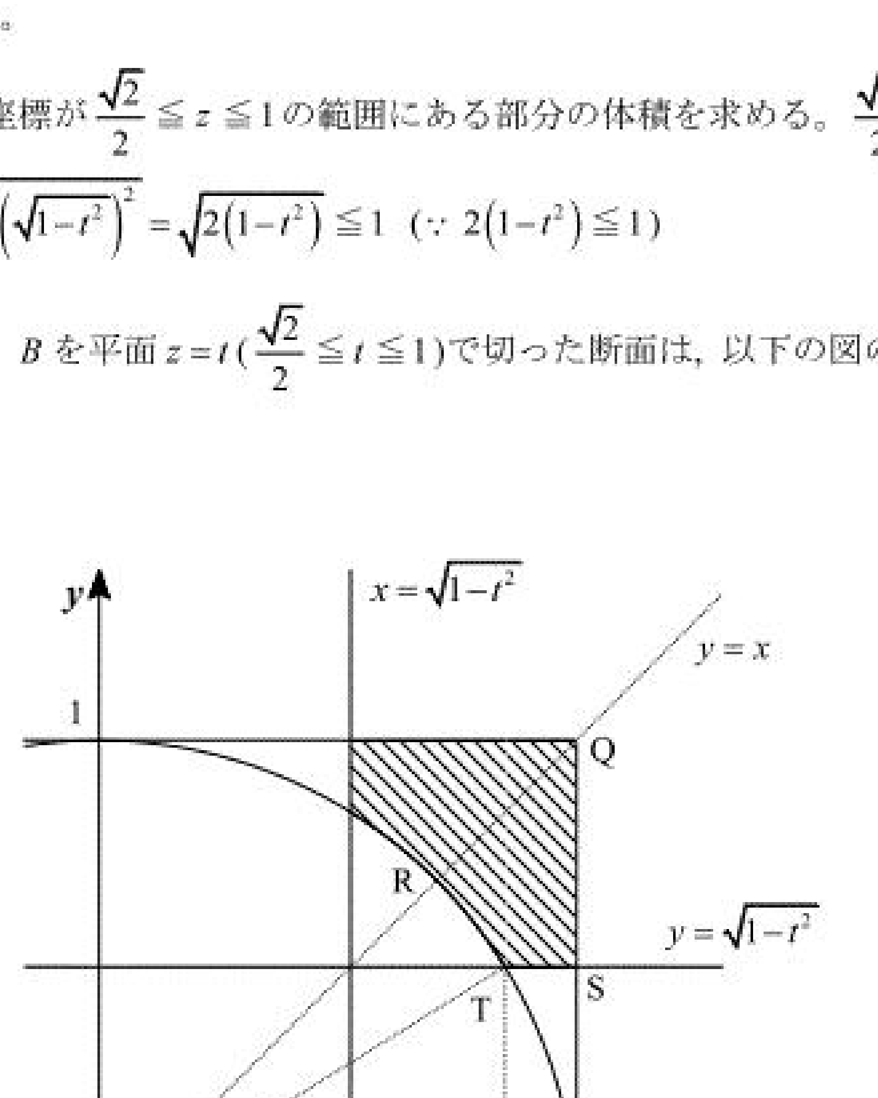
$$\frac{11}{12}\sqrt{2}-2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{11}{12}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4} \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

であることがわかる。

次に，B のうち，z 座標が $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq z \leqq 1$ の範囲にある部分の体積を求める。$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\sqrt{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2}=\sqrt{2\left(1-t^2\right)} \leqq 1\ \ (\because 2\left(1-t^2\right) \leqq 1)$$

となるから，①より，B を平面 $z=t\,(\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq t \leqq 1)$ で切った断面は，以下の図の斜線部のようになる。



上図の斜線部の面積を $S(t)$ とおく。また，上図のように点 P, Q, R, S, T をおき，線分 OT が x 軸正の向きとなす角を $\theta\,(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4})$ とする。このとき，点 T の座標は $\mathrm{T}(\cos\theta, \sin\theta)$ と表せるから

$$t=\cos\theta \qquad \cdot\cdot\cdot ③$$

が成り立つ。さて，斜線部は直線 $y=x$ に関して対称な図形であるから，$S(t)$ は

$$\frac{1}{2}S(t)=(\text{三角形 OPQ の面積})-(\text{台形 OPST の面積})-(\text{扇形 OTR}) \qquad \cdot\cdot\cdot ④$$

を満たす。ここで，各図形の面積は，θ を用いて

$$(\text{三角形 OPQ の面積})=\frac{1}{2}$$

$$(\text{台形 OPST の面積})=\frac{1}{2}\left\{(1-t)+1\right\}\sqrt{1-t^2}=\frac{1}{2}(2-\cos\theta)\sin\theta$$

$$(\text{扇形 OTR の面積})=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

と表せるから，④より，$S(t)$ は θ を用いて

$$S(t)=2\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2-\cos\theta)\sin\theta-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}=1-(2-\cos\theta)\sin\theta-\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

と表せることがわかる。また，③より $\frac{dt}{d\theta}=-\sin\theta$ であり，t と θ の対応関係は

t	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\to$	1
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	0

であるから，B のうち，z 座標が $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq z \leqq 1$ の範囲にある部分の体積は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 S(t)\,dt&=\int_{\frac{\pi}{4}}^0 S(t)\cdot\frac{dt}{d\theta}d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\left\{1-(2-\cos\theta)\sin\theta-\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}(-\sin\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sin\theta-2\sin^2\theta+\sin^2\theta\cos\theta+\theta\sin\theta\right\}d\theta\\&=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\sin\theta d\theta\end{aligned}$$

と立式できる。さらに，各定積分の値は

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta(\sin\theta)'\,d\theta=\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\sin\theta d\theta=\left[\theta(-\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\cos\theta)\,d\theta=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となるから，求める体積は

$$\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{12}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{\pi}{2} \qquad \cdot\cdot\cdot ⑤$$

であることがわかる。

以上②, ⑤より，B の体積は

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{11}{12}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{\pi}{2}\right)=1+\sqrt{2}-\frac{3}{4}\pi$$

と求まる。