1

〔解答〕

(1)		ア		
		79		
(2)	(i)	イ	ウ	エ
		3	3	2
	(ii)	オ		
		6		
	(iii)	カ		
		3		
	(iv)	キ		
		9		

〔解説〕

(1)

ユークリッドの互除法を用いると

$$3239 = 3 \cdot 1027 + 158$$
$$1027 = 6 \cdot 158 + 79$$
$$158 = 2 \cdot 79$$

となる。よって，3239 と1027 の最大公約数は79 である。

(2)

(i)

以下では，問題文中の1つ目，2つ目，3つ目，4つ目の条件を，それぞれ①，②，③，④と書く。①，②より，

$$a = 1+2 = 3$$
$$b = 1+2 = 3$$

である。また，同様に①，②より，cを用いて表を表すと

	1列目	2列目	3列目
1行目	1	2	3
2行目	2	c	$c+2$
3行目	3	$c+2$	$c+5$

となる。表には1以上9 以下の自然数が入るから，

$$c+5 \leqq 9 \Leftrightarrow c \leqq 4$$

である。また，③より

「$2 \leqq c$かつ$3 \leqq c+2$」$\Leftrightarrow 2 \leqq c$

である。また，④より

「$2 < c$かつ$3 < c+2$」$\Leftrightarrow 2 < c$

である。以上より，cは$2 < c \leqq 4$を満たすことが必要である。逆に，$c = 3, 4$のとき，上の表は問の条件を全て満たす。以上より，cがとり得る数は$c = 3, 4$の2個である。

(ii)

1行1列目，1行2列目，2行1列目，2行2列目の数をそれぞれx, y, z, wとおくと,①，②より，表は以下のようになる。

	1列目	2列目	3列目
1行目	x	y	$x+y$
2行目	z	w	$z+w$
3行目	$x+z$	$y+w$	$x+y+z+w$

よって，3行3列目の欄に入り得る最小の数を求めるには，$x+y+z+w$の最小値を求めればよい。③，④より，

$$x \leqq y,\ x < z,\ y < w,\ z \leqq w$$

である。この条件式を満たし，かつ$x+y+z+w$が最小となるのは

$$(x, y, z, w) = (1, 1, 2, 2)$$

のときで，このとき$x+y+z+w = 6$となる。

(iii)

(ii)のx, y, z, wを引き続き用いる。もしx, y, z, wのいずれかが7であれば，

$$x+y+z+w \geqq 1+1+1+7 = 10$$

となるから，問の条件を満たさない。また，もし$x+y$が7であれば，

$$x+y+z+w = (x+y)+(z+w) \geqq (x+y)+(x+y) = 14$$

となるから，問の条件を満たさない。同様に，$x+z$も7とはならない。また，$y+w$が7であれば，④より，

$$x+z \geqq 1+2 = 3$$

であるから

$$x+y+z+w = (x+z)+(y+w) \geqq 3+7 = 10$$

となるから，問の条件を満たさない。以上より，表の欄に7が入るならば，それは$z+w,\ x+y+z+w$のいずれかの欄でなくてはならない。

[1] $z+w = 7$のとき

$$x+y+z+w = x+y+7 \leqq 9$$
$$x+y \geqq 1+1 = 2$$

を満たすことが必要である。これらより，$x+y = 2$である。これを満たすのは，$(x, y) = (1, 1)$のみである。ここで，④より$z \geqq 2$であることに注意すると，③より$z \leqq w$であるから，

$$(z, w) = (2, 5), (3, 4)$$

が必要である。逆に，$(x, y, z, w) = (1, 1, 2, 5), (1, 1, 3, 4)$は問の条件を全て満たす。

[2] $x+y+z+w = 7$のとき

④より$x+z \geqq 3$であり，③より$x+z \leqq y+w$であるから，

$$(x+z, y+w) = (3, 4)$$

である。また，④より$x < z,\ y < w$であるから

$$(x, y, z, w) = (1, 1, 2, 3)$$

である。逆に，$(x, y, z, w) = (1, 1, 2, 3)$は問の条件を全て満たす。

以上[1], [2]より，条件を満たすのは

$$(x, y, z, w) = (1, 1, 2, 5), (1, 1, 3, 4), (1, 1, 2, 3)$$

のときであり，表は3個ある。

(iv)

(ii)のx, y, z, wを引き続き用いる。$x \geqq 2$と仮定すると，

$$x < z,\ x \leqq y,\ y < w$$

より，

$$x+y+z+w \geqq 2+2+3+3 = 10$$

となり，問の条件を満たさない。よって，$x = 1$である。また，$y \geqq 3$と仮定すると，同様にして

$$x+y+z+w \geqq 1+3+2+4 = 10$$

となり，問の条件を満たさない。よって，$y = 1, 2$である。

[1] $y = 1$のとき

$1 < z,\ 1 < w,\ z \leqq w$であり，また

$$x+y+z+w = 2+z+w \leqq 9 \Leftrightarrow z+w \leqq 7$$

であるから，

$$(z, w) = (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4)$$

である。

[2] $y = 2$のとき

$1 < z,\ 2 < w,\ z \leqq w$であり，また

$$x+y+z+w = 3+z+w \leqq 9 \Leftrightarrow z+w \leqq 6$$

であるから，

$$(z, w) = (2, 3), (2, 4), (3, 3)$$

である。

以上[1], [2]より，考えられる表は全部で

$$6+3 = 9\ (\text{個})$$

ある。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ			
	-1	0	-1	2	0	0	1			
(2)	あ	い	う	ソ	タ	チ				
	(e)	(e)	(c)	0	0	2				
(3)	え	お	か	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
	(c)	(e)	(c)	0	-1	2	-1	2	1	2
(4)	ノ									
	2									

〔解説〕

(1)

放物線の式を平方完成すると

$$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b=\frac{1}{2}(x+a)^2-\frac{1}{2}a^2+b$$

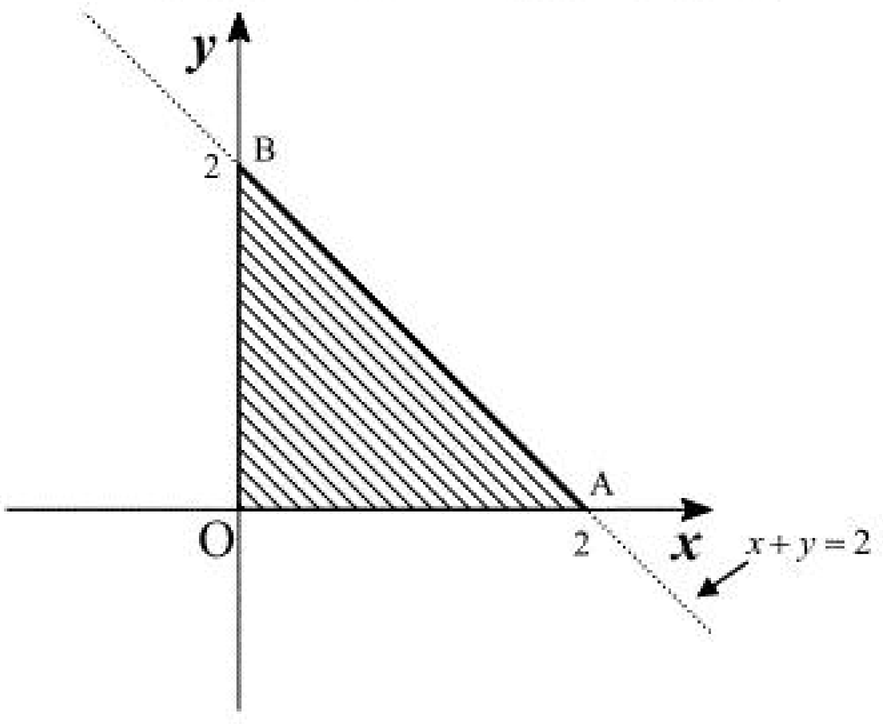
となる。よって

$$p=-1\cdot a+0$$
$$q=\frac{-1}{2}a^2+0\cdot a+0\cdot b^2+1\cdot b$$

である。

(2)

領域 D を図示すると次の図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。



よって，a, b が動く範囲は連立方程式

$$\begin{cases} a \geqq 0 \\ b \geqq 0 \\ a+b \leqq 2 \end{cases}$$

で表される。$\boxed{あ}$, $\boxed{い}$, $\boxed{う}$ にはそれぞれ (e), (e), (c) が入る。

(3)

(1)の結果より，

$$\begin{cases} p=-a \\ q=-\frac{1}{2}a^2+b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-p \\ b=\frac{1}{2}p^2+q \end{cases}$$

である。これを，(2)の結果に代入すると，

$$\begin{cases} -p \geqq 0 \\ \frac{1}{2}p^2+q \geqq 0 \\ -p+\frac{1}{2}p^2+q \leqq 2 \end{cases}$$

となり，整理すると

$$\begin{cases} p \leqq 0 \\ q \geqq -\frac{1}{2}p^2 \\ q \leqq -\frac{1}{2}p^2+p+2 \end{cases}$$

となる。以上より，E は，連立不等式

$$\begin{cases} x \leqq 0 \\ y \geqq \frac{-1}{2}x^2 \\ y \leqq \frac{-1}{2}x^2+1\cdot x+2 \end{cases}$$

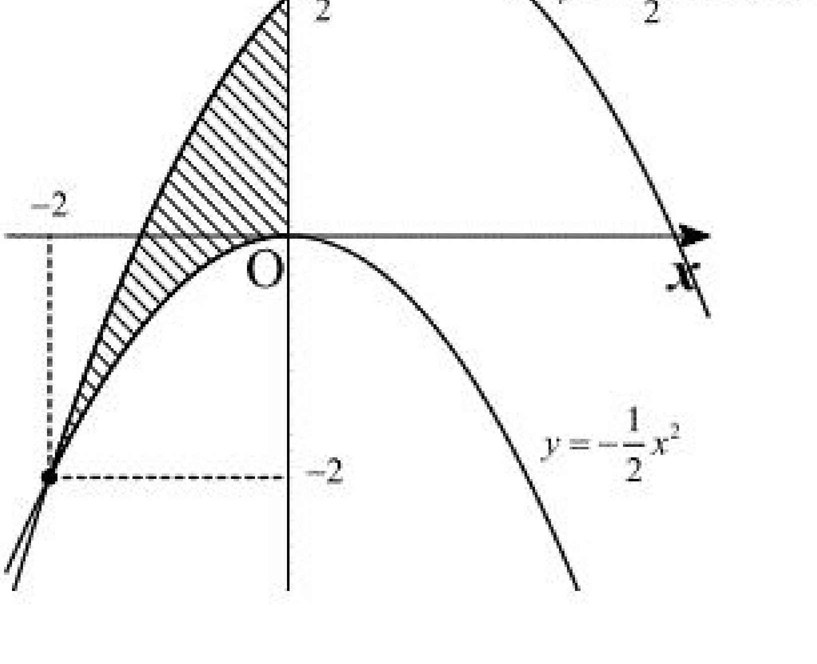
で表される。$\boxed{え}$, $\boxed{お}$, $\boxed{か}$ にはそれぞれ (c), (e), (c) が入る。

(4)

放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2$ と放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{2}$ の交点の x 座標は

$$-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x^2+x+2 \Leftrightarrow x=-2$$

であり，y 座標は，$y=-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2=-2$ である。これと，(3)の結果より，領域 E は次の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



よって，領域 E の面積は

$$\int_{-2}^{0}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+x+2\right)-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}$$
$$=2$$

である。

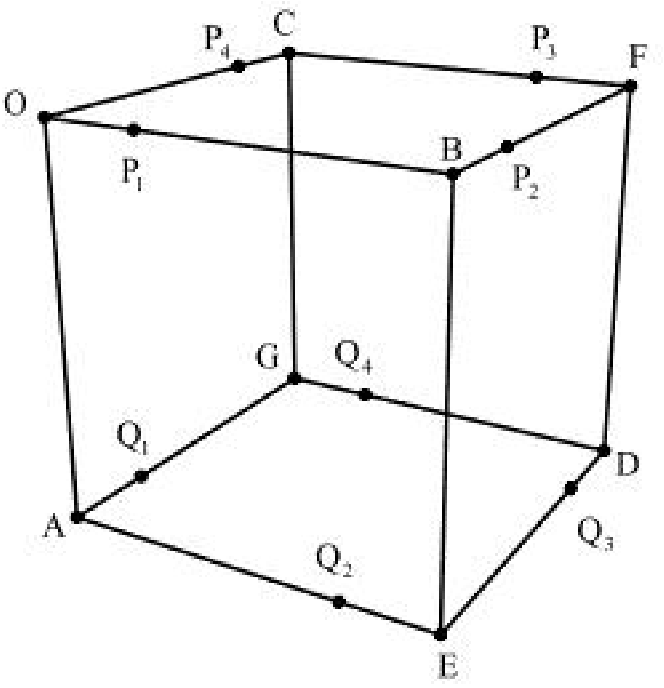
3

〔解答〕

(1)	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ
	1	−1	4	1	4	1	−1	4	−1	4
(2)	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル				
	3	4	1	4	−1	2				
(3)	レ	ロ	ワ	ヲ						
	1	2	9	16						

〔解説〕

(1)



点 P_1 は辺 OB を $1:3$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OP_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\vec{b}$$

である。また，点 Q_1 は辺 GA を $3:1$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OQ_1}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OG}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

である。よって

$$\overrightarrow{P_1Q_1}=\overrightarrow{OQ_1}-\overrightarrow{OP_1}=1\cdot\vec{a}+\frac{-1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

である。同様に考えると

$$\overrightarrow{OP_2}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OF}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OQ_2}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{4}\vec{a}=\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

より

$$\overrightarrow{P_2Q_2}=\overrightarrow{OQ_2}-\overrightarrow{OP_2}=1\cdot\vec{a}+\frac{-1}{4}\vec{b}+\frac{-1}{4}\vec{c}$$

である。

(2)

点 R_i は線分 P_iQ_i を $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OR_1}=(1-t)\overrightarrow{OP_1}+t\overrightarrow{OQ_1}=t\vec{a}+\frac{(1-t)}{4}\vec{b}+\frac{t}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OR_2}=(1-t)\overrightarrow{OP_2}+t\overrightarrow{OQ_2}=t\vec{a}+\left(1-\frac{t}{4}\right)\vec{b}+\frac{(1-t)}{4}\vec{c}$$

である。よって

$$\overrightarrow{R_1R_2}=\overrightarrow{OR_2}-\overrightarrow{OR_1}=\frac{3}{4}\vec{b}+\left(\frac{1}{4}+\frac{-t}{2}\right)\vec{c}$$

である。

(3)

点 R_1, R_2, R_3, R_4 の対称性より，四角形 $R_1R_2R_3R_4$ は正方形である。よって，その面積は

$$\left|\overrightarrow{R_1R_2}\right|^2=\left|\frac{3}{4}\vec{b}+\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{2}\right)\vec{c}\right|^2$$

である。また，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は直交しているから

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

であり，$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$ である。よって，四角形 $R_1R_2R_3R_4$ の面積は

$$\left|\frac{3}{4}\vec{b}+\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{2}\right)\vec{c}\right|^2=\frac{9}{16}\left|\vec{b}\right|^2+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{2}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{2}\right)^2\left|\vec{c}\right|^2$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{9}{16}$$

$$=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{16}$$

であり，これは $0<t<1$ の範囲では $t=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{9}{16}$ をとる。